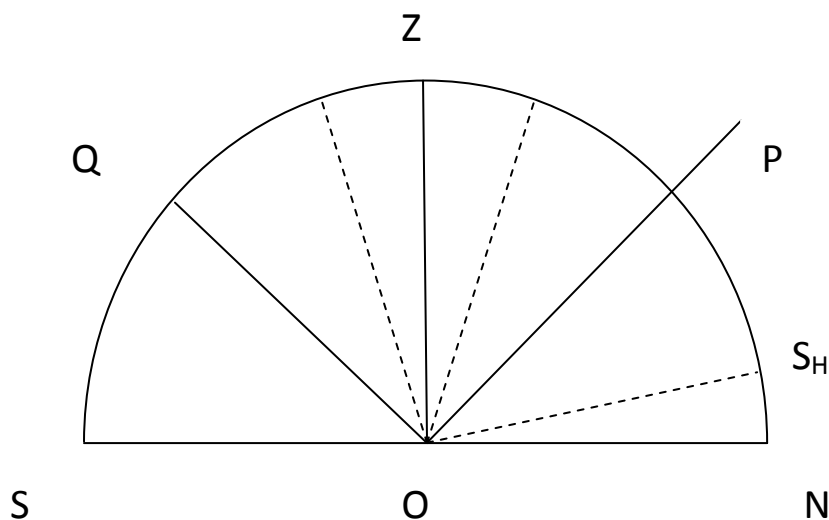


### 8-9 классы

1. Высота светила в верхней кульминации в три раза больше широты места, а высота в нижней кульминации в три раза меньше широты. Чему равно склонение звезды и широта места наблюдения?

**Решение.**



Так как не указано с какой стороны от зенита происходит верхняя кульминация рассматриваем четыре случая:

$$\delta_* < \varphi \quad h_n > 0$$

$$\begin{cases} h_{B1} = 90^\circ - \varphi + \delta_* = 3\varphi \\ h_n = \varphi - 90^\circ + \delta_* = \frac{1}{3}\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 90^\circ + \delta_* = (3+1)\varphi \\ -90^\circ + \delta_* = -\frac{3-1}{3}\varphi \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \delta_* = \frac{10}{6}\varphi \\ \varphi = \frac{180^\circ 3}{14} \end{cases} \quad \begin{cases} \delta_* = 64,3^\circ \\ \varphi \approx 38,6^\circ \end{cases}$$

Что противоречит первому неравенству, далее

$$\delta_* > \varphi \quad h_n > 0$$

$$\begin{cases} h_B = 90^\circ + \varphi - \delta_* = 3\varphi \\ h_n = \varphi - 90^\circ + \delta_* = \frac{1}{3}\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 90^\circ - \delta_* = (3-1)\varphi \\ -90^\circ + \delta_* = -\frac{3-1}{3}\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_* = 90^\circ \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$$

Что противоречит условию задачи, так как высота в верхней кульминации в три раза больше широты места. Попробуем определить при каких коэффициентах  $m$  и  $n$  решение задачи существует.

$$\delta_* < \varphi \quad \delta_* > \varphi$$

$$\begin{cases} h_{B1} = 90^\circ - \varphi + \delta_* = m\varphi \\ h_n = \varphi - 90^\circ + \delta_* = \frac{1}{n}\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} h_{B2} = 90^\circ + \varphi - \delta_* = m\varphi \\ h_n = \varphi - 90^\circ + \delta_* = \frac{1}{n}\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 90^\circ + \delta_* = (m+1)\varphi \\ -90^\circ + \delta_* = -\frac{n-1}{n}\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} 90^\circ - \delta_* = (m-1)\varphi \\ -90^\circ + \delta_* = -\frac{n-1}{n}\varphi \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} \delta_* = \frac{mn+1}{2n}\varphi \\ \varphi = \frac{180^\circ n}{(m+2)n-1} \end{cases} \quad + \begin{cases} \delta_* = 90^\circ \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_* = \frac{mn+1}{2((m+2)n-1)}180^\circ \\ \varphi = \frac{180^\circ n}{(m+2)n-1} \end{cases}$$

$$\delta_* < \varphi \quad mn+1 < 2n$$

$$m < 2 - \frac{1}{n}$$

Ответ: таких комбинаций широты и склонения не существует

2. К какому созвездию направлен вектор орбитальной скорости Земли в день проведения олимпиады, 2 марта?

**Решение.** Поскольку орбита Земли близка к окружности, вектор её орбитальной скорости перпендикулярен радиусу и имеет такое же направление, в котором Солнце было видно с Земли четверть года назад. 2 декабря Солнце проецируется на созвездие Змееносца; туда и направлен вектор орбитальной скорости Земли 2 марта.

3. Человечество решило создать из планет Солнечной системы сферу Дайсона -- оболочку вокруг Солнца, радиусом 1 а.е. и плотностью  $5,5 \text{ г/см}^3$ . Какова она будет в толщину? Площадь скольких планет, подобных Земле, была бы равна площади её поверхности?

**Решение.** Выведем соотношение площадей для того, чтобы ответить на второй вопрос задачи.

$$S_{CD} = 4\pi a^2, S_{\oplus} = 4\pi R_{\oplus}^2$$

$$\frac{S_{CD}}{S_{\oplus}} = \frac{4\pi a^2}{4\pi R_{\oplus}^2} = \left(\frac{a}{R_{\oplus}}\right)^2 = \left(\frac{1,5 \cdot 10^8}{6,4 \cdot 10^3}\right)^2 = 5,5 \cdot 10^8$$

Чтобы ответить на первый вопрос нужно знать массу Земли или оценить массу всех планет в сумме в массах Земли. Грубо можно предположить, что масса равна 1,5-2 массы Юпитера, а так как масса Юпитера 318 Масс Земли, то масса всех планет около 477-640 масс Земли. Оценим сколько толщины сферы дает масса Земли.

$$V_{\oplus} = \frac{4}{3}\pi R_{\oplus}^3, M_{\oplus} = \frac{4}{3}\pi R_{\oplus}^3 \cdot \rho$$

$$V_{CD} = V_{CDh} - V_{CDa} = \frac{4}{3}\pi(a+h)^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 =$$

$$= \frac{4}{3}\pi(a+h-a)(a^2 + 2ah + h^2 + a^2 + ah + h^2) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi h a^2 \left( 2 + 3\frac{h}{a} + 2\left(\frac{h}{a}\right)^2 \right) \approx \frac{8}{3}\pi a^2 h$$

$$V_{CD} = V_{\oplus}$$

$$\frac{8}{3}\pi a^2 h = \frac{4}{3}\pi R_{\oplus}^3$$

$$h = \frac{1}{2} \left( \frac{R_{\oplus}}{a} \right)^2 R_{\oplus} = \frac{R_{\oplus}}{2 \left( \frac{a}{R_{\oplus}} \right)^2} = \frac{6,4 \cdot 10^6}{2 \cdot 5,5 \cdot 10^8} \approx 5,8 \cdot 10^{-3} [м]$$

$$h = N \cdot 5,8 \cdot 10^{-3} = (477 \div 640) \cdot 5,8 \cdot 10^{-3} \approx 2,8 \div 3,7 [м]$$

Ответ: от 2,8 до 3,7 метров

4. Вес марсохода Curiosity на Земле 8,79 кН. Каков его вес на Марсе, если средняя плотность Марса составляет 0,713 от средней плотности Земли, а его радиус –

**Решение.** Вес марсохода на Марсе меньше его веса на Земле во столько же раз, во сколько раз ускорение силы тяжести Марса меньше земного.

Выразим  $g$  через среднюю плотность и радиус планеты:  $g = GM/R^2$ ,  $M = \rho V$ ,  $V = 4\pi R^3/3$ , отсюда  $g = 4\pi G\rho R/3$ , то есть ускорение силы тяжести прямо пропорционально средней плотности планеты и радиусу планеты. Поэтому ускорение силы тяжести на Марсе составляет  $0,713 \times 0,533 = 0,380$  от земного, а вес марсохода –  $8,79 \text{ кН} \times 0,380 = 3,34 \text{ кН}$ .

5. Как менялась видимая с Земли звёздная величина Солнца в ходе прохождения Венеры по солнечному диску 6 июня 2012 года?

**Решение.** Изменение блеска произошло в промежуток время между первым касанием диска Венеры (1-й контакт) и диска Солнца и полным входом Венеры на диск Солнца (2-й контакт). В процессе прохождения блеск Солнца оставался примерно постоянным (если мы не учитываем потемнение диска Солнца к краю, и прочие неравномерности распределения яркости, такие как Солнечные пятна и др.). Также плавно блеск вернулся к прежнему значению во время схода Венеры с диска Солнца.

Оценим падение блеска. Пусть  $R$  и  $r$  – радиус диска Солнца и Венеры,  $R \sim 15'$ ,  $r \sim 0,5'$ . Вне транзита излучение Солнце приходит с площади  $\pi R^2$ . Яркость Солнца уменьшилась из-за того, что часть его излучающей поверхности  $\pi r^2$

$$\Delta m = 2,5 \lg \left( \frac{\pi R^2}{\pi R^2 - \pi r^2} \right) = 0,0012$$