

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**
Теоретический тур отборочного этапа
Математика. 8-9 класс

Задача 1.1. В магазине в наличии есть арбузы и дыни. Сегодня привезли новые арбузы и дыни, а часть арбузов и дынь купили. В результате общее число арбузов и дынь сократилось на 10%, а доля арбузов увеличилась с 55% до 65%. Какое наименьшее количество арбузов могло остаться?

Ответ: 117.

Решение:

Пусть изначально в магазине было A арбузов и D дынь. Значит их общее количество равно $A + D$. После привоза новых и продаж их общее количество стало $0.9(A + D)$. Новое количество арбузов обозначим за A_1 , а новое количество дынь за D_1 . Тогда их общее количество $A_1 + D_1$. Так же по условию доля арбузов выросла с 55% до 65%. Тогда:

$$A_1 + D_1 = 0.9(A + D)$$

$$A_1 = 0.65(A_1 + D_1) = 0.65 * 0.9(A + D) = 0.585(A + D) \quad (1)$$

$$A = 0.55(A + D) = 0.55A + 0.55D$$

$$0.55D = 0.45A$$

$$D = \frac{0.45}{0.55} A = \frac{9}{11} A$$

$$A + D = A + \frac{9}{11} A = \frac{20}{11} A$$

Подставим полученный результат в выражение (1):

$$A_1 = 0.585(A + D) = 0.585 \cdot \frac{20}{11} A = \frac{11.7}{11} A$$

Так как количество арбузов A_1 должно быть целым числом, то A должно быть кратно 11.

Если $A = 11$, то $D = 9$, $A + D = 20$. Тогда $A_1 = 11.7$, что не является целым числом.

Если $A = 22$, то $D = 18$, $A + D = 40$. Тогда $A_1 = 23.4$, что не является целым числом.

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**
Теоретический тур отборочного этапа
Математика. 8-9 класс

Последовательно проверив варианты для A равным 33, 44, 55, 66, 77, 88 и 99 легко убедится, что так же не получится целое число.

Наконец, пусть $A = 110$. Тогда $D = 90$, $A + D = 200$ и $A_1 = 117$, что является целым.

Задача 1.2. В магазине в наличии есть арбузы и дыни. Сегодня привезли новые арбузы и дыни, а часть арбузов и дынь купили. В результате общее число арбузов и дынь увеличилось на 10%, а доля арбузов уменьшилась с 55% до 45%. Какое наименьшее количество арбузов могло остаться?

Ответ: 99.

Решение:

Можно решить данную задачу аналогично предыдущему решению. Рассмотрим более простой подход. Пусть изначальное общее количество арбузов и дынь было X , а изначальное количество арбузов A . Изначальная доля арбузов 55%, значит $A = 0.55X$. (1) После довоза и продаж общее количество изменилось (обозначим его за X_1) и стало равным $X_1 = 1.1X$. Новая доля арбузов составляет 45%, значит $A_1 = 0.45X_1 = 0.45 * (1.1X) = 0.495X$. (2)

Поскольку количество арбузов должно быть целым числом, то выражения (1) и (2) должны быть целыми.

$$0.55X = \frac{55}{100}X = \frac{11}{20}X$$

$$0.495X = \frac{495}{1000}X = \frac{99}{200}X$$

Значит X должно делиться на 20 и на 200. Наименьшее целое X , удовлетворяющее обоим условиям это 200. Значит количество оставшихся арбузов $A_1 = 0.495 * 200 = 99$.

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**
Теоретический тур отборочного этапа
Математика. 8-9 класс

Задача 2.1. Вдоль аллеи планируется посадить 13 саженцев деревьев: 8 берёз и 5 елей. Сколько существует способов это сделать так, чтобы никакие две ели на росли рядом?

Ответ: 126.

Решение:

Рассмотрим 8 берёз расположенных в ряд. Существует 9 возможных мест для посадки елей (7 между берёзами и 2 по краям). Нужно выбрать из этих 9 возможных мест 5 для посадки елей. Порядок выбора не имеет значения, а значит:

$$C_9^5 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9!}{5!4!} = 126$$

Задача 2.2. Вдоль аллеи планируется посадить 14 саженцев деревьев: 9 берёз и 5 елей. Сколько существует способов это сделать так, чтобы никакие две ели на росли рядом?

Ответ: 252.

Решение:

Рассмотрим 9 берёз расположенных в ряд. Существует 10 возможных мест для посадки елей (8 между берёзами и 2 по краям). Нужно выбрать из этих 10 возможных мест 5 для посадки елей. Порядок выбора не имеет значения, а значит:

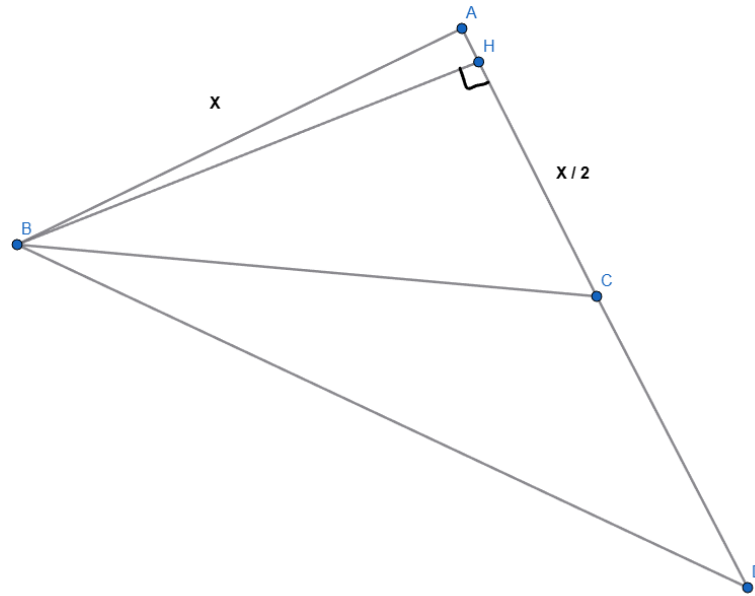
$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5!5!} = 252$$

Задача 3.1. В треугольнике ABC проведена высота BH (точка H лежит на отрезке AC). Оказалось, что $AB = 2CH$. На луче AC за точкой C отмечена точка D такая, что $AC = CD$. Найдите $\angle ABD$, если известно, что $\angle BAC = 42^\circ$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 117.

Решение:

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**
Теоретический тур отборочного этапа
Математика. 8-9 класс



Пусть $\angle BAC = \alpha = 42^\circ$, $AB = x$, $CH = \frac{x}{2}$. Из треугольника ABH получаем:

$$BH = x \sin \alpha, AH = x \cos \alpha$$

Длина отрезка $AC = AH + CH = x \cos \alpha + \frac{x}{2} = x(\cos \alpha + 0.5)$

Так как $AC = CD$ по условию, значит $CD = x(\cos \alpha + 0.5)$

$$HD = HC + CD = x/2 + x(\cos \alpha + 0.5) = x(1 + \cos \alpha)$$

Рассмотрим треугольник BHD :

$$\operatorname{tg}(\angle ADB) = \frac{BH}{HD} = \frac{x \sin \alpha}{x(1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Следовательно: $\angle ADB = \frac{\alpha}{2} = 21^\circ$

Рассмотрим треугольник ADB . Сумма углов равна 180 градусам, и два угла найдено. Значит искомый ответ $180 - 21 - 42 = 117$.

Задача 3.2. В треугольнике ABC проведена высота BH (точка H лежит на отрезке AC). Оказалось, что $AB = 2CH$. На луче AC за точкой C отмечена точка

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**
Теоретический тур отборочного этапа
Математика. 8-9 класс

D такая, что $AC = CD$. Найдите $\angle ABD$, если известно, что $\angle BAC = 66^\circ$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 81.

Решение:

Пусть $\angle BAC = \alpha = 66^\circ$, $AB = x$, $CH = \frac{x}{2}$. Из треугольника ABH получаем:

$$BH = x \sin \alpha, AH = x \cos \alpha$$

$$\text{Длина отрезка } AC = AH + CH = x \cos \alpha + \frac{x}{2} = x(\cos \alpha + 0.5)$$

Так как $AC = CD$ по условию, значит $CD = x(\cos \alpha + 0.5)$

$$HD = HC + CD = x/2 + x(\cos \alpha + 0.5) = x(1 + \cos \alpha)$$

Рассмотрим треугольник BHD :

$$\operatorname{tg}(\angle ADB) = \frac{BH}{HD} = \frac{x \sin \alpha}{x(1 + \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{Следовательно: } \angle ADB = \frac{\alpha}{2} = 33^\circ$$

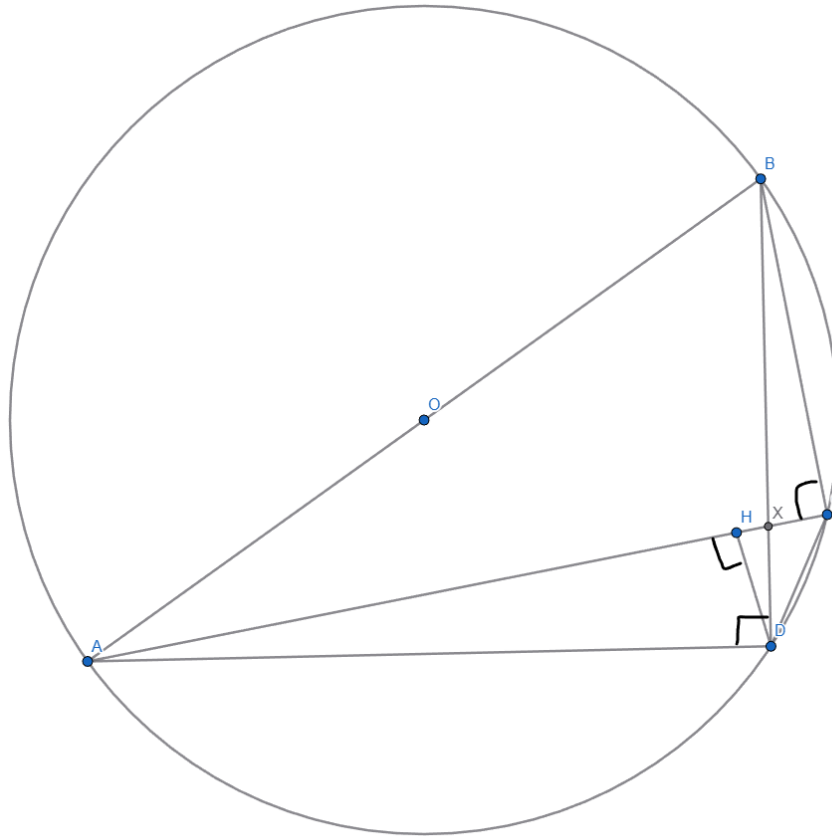
Рассмотрим треугольник ADB . Сумма углов равна 180 градусам, и два угла найдено. Значит искомый ответ $180 - 33 - 66 = 81$.

Задача 4.1. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Пусть AC и BD пересекаются в точке X . Известно, что $\angle ADB = 90^\circ$, $BC = 3$, $CX = \frac{3}{4}$, а площадь треугольника ACD в три раза меньше площади треугольника ABC . Чему равно AH ?

Ответ: 4.25

Решение:

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**
Теоретический тур отборочного этапа
Математика. 8-9 класс



Поскольку четырёхугольник вписанный, значит $\angle BCA = 90^\circ$, так как опирается на диаметр окружности.

По теореме Пифагора в треугольнике BCX :

$$BX = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{153}}{4}$$

Используя данные задачи про отношение площадей:

$$3 = \frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BC}{\frac{1}{2} AC \cdot DH} = \frac{BC}{DH} = \frac{3}{DH}$$

Откуда $DH = 1$.

Треугольники HXD и CXB подобны по двум углам (треугольники прямоугольные и имеют равные вертикальные углы), с коэффициентом подобия

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**
Теоретический тур отборочного этапа
Математика. 8-9 класс

$$\frac{BC}{HD} = \frac{3}{1} = 3$$

Следовательно $XD = \frac{BX}{3} = \frac{\sqrt{153}}{12}$

По теореме об отрезках пересекающихся хорд: $AX \cdot XC = BX \cdot DX$, откуда:

$$AX = \frac{BX \cdot DX}{XC} = \frac{\frac{\sqrt{153}}{4} \cdot \frac{\sqrt{153}}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{153}{36} = 4,25$$

Задача 4.2. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Пусть AC и BD пересекаются в точке X . Известно, что $\angle ADB = 90^\circ$, $BC = 5$, $CX = \frac{5}{2}$, а площадь треугольника ACD в пять раз меньше площади треугольника ABC . Чему равно AX ?

Ответ: 2.5

Решение:

Поскольку четырёхугольник вписанный, значит $\angle BCA = 90^\circ$, так как опирается на диаметр окружности.

По теореме Пифагора в треугольнике BCX :

$$BX = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5^2} = \frac{\sqrt{125}}{2}$$

Используя данные задачи про отношение площадей:

$$5 = \frac{S_{ABC}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot BC}{\frac{1}{2} AC \cdot DH} = \frac{BC}{DH} = \frac{5}{DH}$$

Откуда $DH = 1$.

Треугольники HXD и CXB подобны по двум углам (треугольники прямоугольные и имеют равные вертикальные углы), с коэффициентом подобия

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**
Теоретический тур отборочного этапа
Математика. 8-9 класс

$$\frac{BC}{HD} = \frac{5}{1} = 5$$

Следовательно $XD = \frac{BX}{5} = \frac{\sqrt{125}}{10}$

По теореме об отрезках пересекающихся хорд: $AX \cdot XC = BX \cdot DX$, откуда:

$$AX = \frac{BX \cdot DX}{XC} = \frac{\frac{\sqrt{125}}{2} \cdot \frac{\sqrt{125}}{10}}{\frac{5}{2}} = \frac{125}{50} = 2,5$$

Задача 5.1. Про вещественные положительные числа a и b известно, что

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{13}{5}. \text{ Чему равняется } \frac{a + b}{a - b} ?$$

Ответ: 5

Решение:

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{13}{5}$$

$$5a^2 + 5b^2 = 13a^2 - 13b^2$$

$$18b^2 = 8a^2$$

$$9b^2 = 4a^2$$

$$3b = 2a$$

$$a = \frac{3}{2}b$$

Подставив полученный результат в искомое выражение, получаем:

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{a + 1.5b}{1.5b - b} = \frac{2.5b}{0.5b} = 5$$

Задача 5.2. Про вещественные положительные числа a и b известно, что

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{17}{8}. \text{ Чему равняется } \frac{a + b}{a - b} ?$$

Ответ: 4

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**
Теоретический тур отборочного этапа
Математика. 8-9 класс

Решение:

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{17}{8}$$

$$8a^2 + 8b^2 = 17a^2 - 17b^2$$

$$25b^2 = 9a^2$$

$$5b = 3a$$

$$a = \frac{5}{3}b$$

Подставив полученный результат в искомое выражение, получаем:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{5}{3}b+b}{\frac{5}{3}b-b} = \frac{\frac{8}{3}b}{\frac{2}{3}b} = 4$$

Задача 6.1. Про натуральное n и целое x известно, что

$$x + x^2 + x^4 + x^8 + \dots + x^{2^n} = 200 + 200^2 + 200^4 + 200^8 + \dots + 200^{2^n}$$

Найдите наименьшее x , которое является решением этого уравнения хотя бы при одном n .

Ответ: -201

Решение:

Очевидно, что $x = 200$ является решением для любых натуральных n .

Рассмотрим случай $n = 1$. Тогда исходное уравнение имеет вид:

$$x + x^2 = 200 + 200^2$$

$$x^2 + x - 40200 = 0$$

Корнями данного уравнения являются $x_1 = 200$ и $x_2 = -201$.

Теперь покажем, что во всех остальных случаях нет никаких решений кроме $x = 200$.

Перенеся в исходном уравнении всё в левую часть и группируя слагаемые, имеем:

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ**
Теоретический тур отборочного этапа
Математика. 8-9 класс

$$(x - 200) + (x^2 - 200^2) + (x^4 - 200^4) + \dots + (x^{2^n} - 200^{2^n}) = 0$$

Вынесем общий множитель $(x - 200)$ и сократим на него:

$$1 + (x + 200) + (x^3 + 200x^2 + 200^2x + 200^3) + \dots = 0$$

Левая часть уравнения всегда положительна.

Задача 6.2. Про натуральное n и целое x известно, что

$$x + x^2 + x^4 + x^8 + \dots + x^{2^n} = 100 + 100^2 + 100^4 + 100^8 + \dots + 100^{2^n}$$

Найдите наименьшее x , которое является решением этого уравнения хотя бы при одном n .

Ответ: -101

Решение:

Очевидно, что $x = 100$ является решением для любых натуральных n .

Рассмотрим случай $n = 1$. Тогда исходное уравнение имеет вид:

$$x + x^2 = 100 + 100^2$$

$$x^2 + x - 10100 = 0$$

Корнями данного уравнения являются $x_1 = 100$ и $x_2 = -101$.

Теперь покажем, что во всех остальных случаях нет никаких решений кроме $x = 100$.

Перенеся в исходном уравнении всё в левую часть и группируя слагаемые, имеем:

$$(x - 100) + (x^2 - 100^2) + (x^4 - 100^4) + \dots + (x^{2^n} - 100^{2^n}) = 0$$

Вынесем общий множитель $(x - 100)$ и сократим на него:

$$1 + (x + 100) + (x^3 + 100x^2 + 100^2x + 100^3) + \dots = 0$$

Левая часть уравнения всегда положительна.

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
Теоретический тур отборочного этапа
Математика. 8-9 класс**
