Задача 1.1. Коля купил несколько литровых бутылок с водой, квасом и лимонадом. После того, как он выпил 97% воды, 54% кваса и 11% лимонада, оказалось, что Коля выпил ровно 30% купленной жидкости. Какое наименьшее количество бутылок с жидкостью мог купить Коля?

Ответ: 43

Решение:

Обозначим количество бутылок с водой за x, с квасом за y и с лимонадом за z. Тогда:

$$0.97x+0.54y+0.11z=0.3(x+y+z)$$

Откуда получаем: $67x+24y=19z$ (1)

Перед нами уравнение в целых числах. Выражение слева должно делится на 19. Значит:

$$(3\cdot 19+10)x+(19+5)y=19z$$

$$57x+10x+19y+5y=19z$$

$$19(3x+y)+10x+5y=19z$$

$$(3x+y)+\frac{10x+5y}{19}=z$$

Поскольку все переменные – целые числа, полученная дробь так же должна быть целым числом, и её числитель должен делится на 19.

$$10x+5y=19k$$

$$5(2x+y)=19k$$

Число k должно делится на 5. Пусть k = $5m$.

$$5(2x+y)=19(5m)$$

$$2x+y=19m$$

$$y=19m-2x$$

Подставим полученный результат в выражение (1):

$$67x+24(19m-2x)=19z$$

$$19x+456m=19z$$

$$z=x+24m$$

Наша задача найти минимально значение выражения $x+y+z$. Подставим оба полученных результата в него:

$$x+y+z=x+(19m-2x)+(x+24m)=43m$$

Так как все переменные – натуральные числа, то минимальное значение достигается при $m = 1$.

Задача 1.2. Коля купил несколько литровых бутылок с водой, квасом и лимонадом. После того, как он выпил 86% воды, 49% кваса и 12% лимонада, оказалось, что Коля выпил ровно 30% купленной жидкости. Какое наименьшее количество бутылок с жидкостью мог купить Коля?

Ответ: 37

Решение:

Обозначим количество бутылок с водой за x, с квасом за y и с лимонадом за z. Тогда:

$$0.86x+0.49y+0.12z=0.3(x+y+z)$$

Откуда получаем: $56x+19y=18z$ (1)

Перед нами уравнение в целых числах. Выражение слева должно делится на 18. Значит:

$$(3\cdot 18+2)x+(18+1)y=18z$$

$$54x+2x+18y+y=18z$$

$$18(3x+y)+2x+y=18z$$

$$(3x+y)+\frac{2x+y}{18}=z$$

Поскольку все переменные – целые числа, полученная дробь так же должна быть целым числом, и её числитель должен делится на 18.

$$2x + y = 18k$$

$$y = 18k - 2x$$

Подставим полученный результат в выражение (1):

$$56x + 19(18m - 2x) = 18z$$

$$18x + 342k = 18z$$

$$z = x + 19k$$

Наша задача найти минимально значение выражения $x + y + z$. Подставим оба полученных результата в него:

$$x + y + z = x + (18k - 2x) + (x + 19k) = 37k$$

Так как все переменные – натуральные числа, то минимальное значение достигается при $k = 1$.

Задача 2.1. Найдите наименьший корень уравнения $3\sin x + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}, \pi\right]$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: -120

Решение:

Преобразуя исходное уравнение, получаем:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Из всех решений заданному отрезку удовлетворяют: $-\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}$. Второе меньше первого, переводя в градусы получаем ответ.

Задача 2.2. Найдите наибольший корень уравнения $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 390.

Решение:

Преобразуя уравнение, получим:

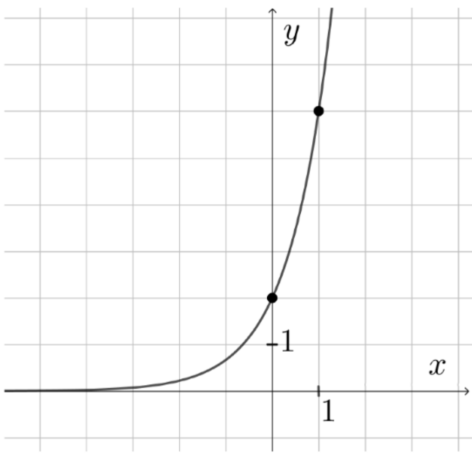
$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

Из всех решений заданному отрезку удовлетворяют: $\pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{13\pi}{6}$. Переводя наибольший корень в градусы, получаем ответ.

Задание 3.1. На рисунке изображен график функции $f(x) = 2 \cdot a^x$. Найдите *f(4)*.

Ответ: 162



Подставим точку (1, 6) в формулу задающую функцию:

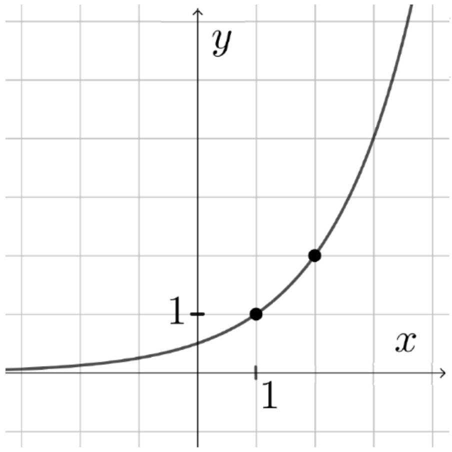
$$6 = 2 \cdot a^1$$

Откуда $a = 3$. Значит: $f(4) = 2 \cdot 3^4 = 162$

Задание 3.2. На рисунке изображен график функции $f(x) = \frac{1}{2}a^x$. Найдите *f(6)*.

Ответ: 32.

Решение:



Подставим точку (1, 1) в формулу задающую функцию:

$$1 = \frac{1}{2} \cdot a^1$$

Откуда $a = 2$. Значит: $f(6) = \frac{1}{2} \cdot 2^6 = 32$.

Задача 4.1. В мешке фокусника находятся 100 карт четырёх мастей (карт каждой масти не обязательно поровну). Известно, что если взять наугад 90 карт, то среди них обязательно встретятся все четыре масти. Какое наименьшее количество карт надо взять, чтобы среди них наверняка нашлись карты трёх мастей?

Ответ: 79

Решение:

Так как среди 90 взятых карт точно встречаются все масти, это говорит о том, что невозможна ситуация, что карт какой-то одной масти 10 или меньше. Если бы это было так, то можно было бы набрать 90 карт избежав этой масти. Значит количество карт каждой масти должно быть не менее 11. Теперь рассмотрим наихудший случай – наибольшее возможное количество карт принадлежит двум мастям. Очевидно, с учетом описанных рассуждений, это 100 – 11- 11 = 78 карт. И необходимо добавить одну карту третьей масти. Получаем ответ.

Задача 4.2. В мешке фокусника находятся 100 карт четырёх мастей (карт каждой масти не обязательно поровну). Известно, что если взять наугад 85 карт, то среди них обязательно встретятся все четыре масти. Какое наименьшее количество карт надо взять, чтобы среди них наверняка нашлись карты трёх мастей?

Ответ: 69

Решение:

Так как среди 85 взятых карт точно встречаются все масти, это говорит о том, что невозможна ситуация, что карт какой-то одной масти 15 или меньше. Если бы это было так, то можно было бы набрать 85 карт избежав этой масти. Значит количество карт каждой масти должно быть не менее 16. Теперь рассмотрим наихудший случай – наибольшее возможное количество карт принадлежит двум мастям. Очевидно, с учетом описанных рассуждений, это 100 – 16- 16 = 68 карт. И необходимо добавить одну карту третьей масти. Получаем ответ.

Задача 5.1. На полке в библиотеке в ряд стоят 10 книг. Иногда хулиган Вася приходит и меняет местами какие-нибудь две соседние книги. Какое минимальное количество раз Вася должен прийти в библиотеку, чтобы после его ухода каждая книга побывала как на первом месте, так и на последнем?

Ответ: 65

Решение:

Для каждой книги отметим два особых момента: момент, когда книга побывала на первом месте, и момент, когда книга побывала на последнем месте. Первым особым моментом назовем тот момент, что случился хронологически раньше.

Для каждой книги подсчитаем количество обменов, учтя, что в обмене участвует 2 книги, значит полученный результат будет в 2 раза больше общего количества обменов.

Разобьём всем обмены на три класса: ранние – до первого особого момента, средние – между особыми моментами, поздние – после второго особого момента.

Очевидно, что для каждой книги существует не менее 9 средних обменов. Найдем минимальное суммарное количество ранних обменов. Для книг на 1 и 10 местах ранних обменов быть не могло, для книг на 2 и 9 местах должен быть хотя бы 1 ранний обмен и.т.д. Для книг на 5 и 6 местах должны найтись хотя бы 4 ранних обменов. Итого, ранних обменов было не менее 2*(0+1+2+3+4)=20. Аналогично, поздних обменов не менее 20. Итого, подсчитываемая величина не менее 9 * 10 + 20 + 20 = 130. И для учета двух книг в одном обмене, нужно взять половину от всех. Итого 65.

Задача 5.2. На полке в библиотеке в ряд стоят 12 книг. Иногда хулиган Вася приходит и меняет местами какие-нибудь две соседние книги. Какое минимальное количество раз Вася должен прийти в библиотеку, чтобы после его ухода каждая книга побывала как на первом месте, так и на последнем?

Ответ: 96

Решение:

Для каждой книги отметим два особых момента: момент, когда книга побывала на первом месте, и момент, когда книга побывала на последнем месте. Первым особым моментом назовем тот момент, что случился хронологически раньше.

Для каждой книги подсчитаем количество обменов, учтя, что в обмене участвует 2 книги, значит полученный результат будет в 2 раза больше общего количества обменов.

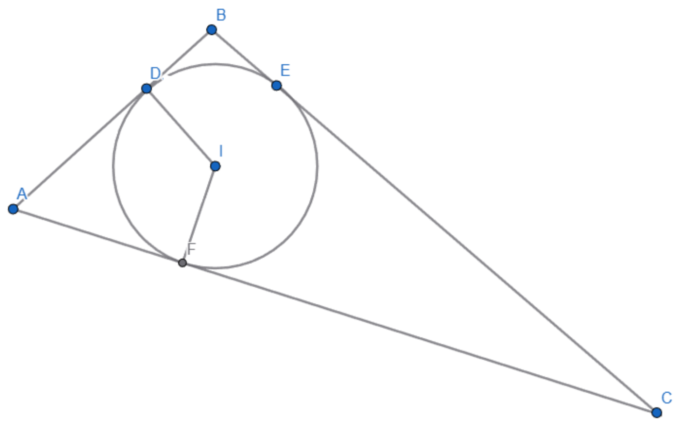
Разобьём всем обмены на три класса: ранние – до первого особого момента, средние – между особыми моментами, поздние – после второго особого момента.

Очевидно, что для каждой книги существует не менее 11 средних обменов. Найдем минимальное суммарное количество ранних обменов. Для книг на 1 и 12 местах ранних обменов быть не могло, для книг на 2 и 9 местах должен быть хотя бы 1 ранний обмен и.т.д. Для книг на 6 и 7 местах должны найтись хотя бы 5 ранних обменов. Итого, ранних обменов было не менее 2*(0+1+2+3+4+5)=30. Аналогично, поздних обменов не менее 30. Итого, подсчитываемая величина не менее 11 * 12 + 30 + 30 = 192. И для учета двух книг в одном обмене, нужно взять половину от всех. Итого 96.

Задача 6.1. На сторонах *AB, BC, AC* треугольника отметили точки *D, E, F* так, что *BD* = *BE* и *CE* = *CF*. Отметили точку *I* пересечения биссектрис треугольника *ABC*. Найдите угол *FID*, если известно, что угол *BAC* равен 53 градуса.

Ответ: 127

Решение:



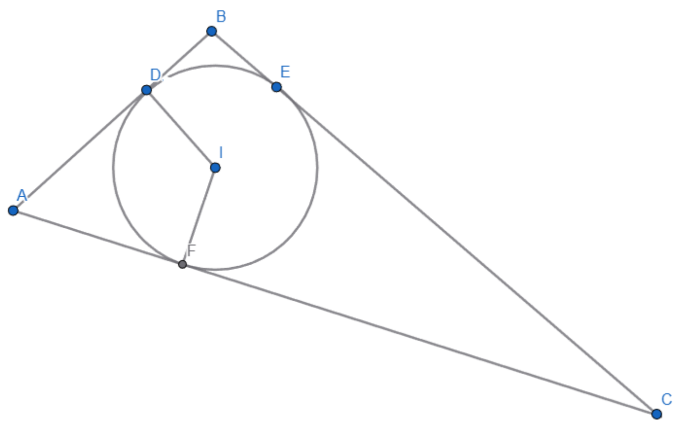
Точка пересечения биссектрис является центром вписанной в треугольник окружности. Равенство указанных отрезков в условии задачи говорит о том, что точки *D, E, F* являются точками касания этой окружности сторон треугольника. Рассмотрим четырёхугольник *ADIF*. Поскольку углы *ADI* и *AFI*

– это углы между радиусом окружности и касательными к ним, то их сумма равна 180 градусам. Поскольку сумма углов четырёхугольника составляет 360 градусов, значит искомый угол *FID*: 360 – 180 – 53 = 127.

Задача 6.2. На сторонах *AB, BC, AC* треугольника отметили точки *D, E, F* так, что *BD* = *BE* и *CE* = *CF*. Отметили точку *I* пересечения биссектрис треугольника *ABC*. Найдите угол *FID*, если известно, что угол *BAC* равен 49 градуса.

Ответ: 131

Решение:



Точка пересечения биссектрис является центром вписанной в треугольник окружности. Равенство указанных отрезков в условии задачи говорит о том, что точки *D, E, F* являются точками касания этой окружности сторон треугольника. Рассмотрим четырёхугольник *ADIF*. Поскольку углы *ADI* и *AFI* – это углы между радиусом окружности и касательными к ним, то их сумма равна 180 градусам. Поскольку сумма углов четырёхугольника составляет 360 градусов, значит искомый угол *FID*: 360 – 180 – 49 = 131.

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Теоретический тур отборочного этапа

Математика. 10-11 класс

Москва

2025/2026 уч. г.