МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап

Междисциплинарные задачи

10 - 11 класс

Задача 1 (10-11 класс): Вариант А

Ученик исследует зависимость периода T математического маятника от его длины L. Для длины L = 1,00 м он проводит 20 измерений периода. Результаты (в секундах):

T = [2,01; 2,00; 1,99; 2,02; 2,01; 1,98; 2,03; 2,00; 2,01; 2,00; 2,02; 1,99; 2,01; 2,00; 2,01; 1,97; 2,02; 2,00; 2,01; 2,02].

Теоретический период вычисляется по формуле $T_{теор} = 2\pi\sqrt{(L/g)}$, где g = 9,81 м/с².

Вопросы:

1. Что такое случайная и систематическая погрешность измерений? Какая из них может быть уменьшена путём увеличения числа измерений?
2. Постройте гистограмму распределения измеренных значений периода, разбив диапазон от 1,96 с до 2,04 с на 4 интервала. Определите, в какой интервал попало наибольшее число измерений.
3. Вычислите среднее арифметическое значение периода $\langle T \rangle$ по выборке и его теоретическое значение $T_{теор}$ для L = 1,00 м.
4. Оцените абсолютную и относительную погрешность определения ускорения свободного падения g по данным этого эксперимента. Используйте формулу $g = 4\pi^2 L / \langle T \rangle^2$. Погрешность $\langle T \rangle$ оцените как половину ширины интервала гистограммы, где сосредоточено большинство значений.
5. Опишите алгоритм (или нарисуйте блок-схему) для проверки гипотезы о нормальности распределения результатов измерений методом «трёх сигм»: вычисление среднего $\langle T \rangle$, стандартного отклонения σ, и проверка, какая доля измерений попадает в интервал $(\langle T \rangle - 3\sigma, \langle T \rangle + 3\sigma)$.

РЕШЕНИЕ

Дано:

L = 1,00 м, g = 9,81 м/с².

Москва
2025/2026 уч. г.

Массив T: [2,01; 2,00; 1,99; 2,02; 2,01; 1,98; 2,03; 2,00; 2,01; 2,00; 2,02; 1,99; 2,01; 2,00; 2,01; 1,97; 2,02; 2,00; 2,01; 2,02].

Вопрос 1:

Случайная погрешность — возникает из-за случайных факторов, меняется от измерения к измерению. Может быть уменьшена увеличением числа измерений (за счет усреднения).

Систематическая погрешность — постоянная или закономерно изменяющаяся, вызвана несовершенством метода или приборов. Увеличением числа измерений не уменьшается.

Вопрос 2:

Диапазон от 1,96 до 2,04 с разбиваем на 4 интервала:

1) 1,960 – 1,980
2) 1,980 – 2,000
3) 2,000 – 2,020
4) 2,020 – 2,040

Выполним точный подсчет:

Значения: 2,01 (позиции 1, 5, 9, 13, 15, 19), 2,00 (2, 8, 10, 14, 18), 1,99 (3, 12), 2,02 (4, 11, 17, 20), 1,98 (6), 2,03 (7), 1,97 (16).

Сгруппируем:

- [1,96-1,98]: 1,97 (16), 1,98 (6) → **2**
- (1,98-2,00]: 1,99 (3,12) → **2;** 2,00 (2,8,10,14,18) → **5**; **итого 7**
- (2,00-2,02]: 2,01 (1,5,9,13,15,19) → **6**; 2,02 (4,11,17,20) → **4**; **итого 10**
- (2,02-2,04]: 2,03 (7) → **1**

Наибольшее число измерений (11) в интервале 2,000 – 2,020 с.

Вопрос 3:

Среднее арифметическое:

$$\langle T \rangle = \frac{\sum \quad T_i}{20} = \frac{40{,}1}{20} = 2{,}005 \text{ с}$$

Теоретический период:

$$T_{\text{теор}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1{,}00}{9{,}81}} \approx 6{,}2832 \cdot \sqrt{0{,}10194} \approx 6{,}2832 \cdot 0{,}3193 \approx 2{,}006 \text{ с}$$

Вопрос 4:

Формула для g:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{\langle T \rangle^2} = \frac{4 \cdot 3{,}1416^2 \cdot 1{,}00}{2{,}005} \approx 9{,}82 \text{ м/с}^2$$

Погрешность $\langle T \rangle$ оценим как половину ширины интервала, где большинство значений. Интервал [2,00; 2,02] имеет ширину 0,02 с, половина = 0,01 с.

Относительная погрешность $\frac{\Delta \langle T \rangle}{\langle T \rangle} = \frac{0{,}01}{2{,}005} \approx 0{,}005$.

Тогда относительная погрешность g: $\frac{\Delta g}{g} = 2 \cdot \frac{\Delta \langle T \rangle}{\langle T \rangle} = 0{,}01 = 1\%$

Абсолютная погрешность $\Delta g = 9{,}82 \cdot 0{,}01 \approx 0{,}1$ м/с^2.

Итак, g = 9,82 ± 0,1 м/с^2.

Вопрос 5:

Алгоритм метода трех сигм:

1. Вычислить среднее $\mu = \langle T \rangle$.
2. Вычислить стандартное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \quad (T_i - \mu)^2}{n - 1}}$$

3. Определить интервал $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.
4. Подсчитать количество измерений, попадающих в этот интервал.
5. Если доля попавших измерений близка к 99,7%, то распределение можно считать нормальным.

Задача 1 (10-11 класс): Вариант Б

Ученик исследует зависимость периода T математического маятника от его длины L. Для длины L = 0,80 м он проводит 20 измерений периода. Результаты (в секундах):

T = [1,79; 1,81; 1,78; 1,80; 1,82; 1,79; 1,80; 1,81; 1,78; 1,80; 1,79; 1,81; 1,80; 1,79; 1,82; 1,80; 1,79; 1,80; 1,81; 1,80].

Теоретический период вычисляется по формуле $T_{теор} = 2\pi\sqrt{(L/g)}$, где g = 9,81 м/с².

Вопросы:

1. Что такое случайная и систематическая погрешность измерений? Какая из них может быть уменьшена путём увеличения числа измерений?
2. Постройте гистограмму распределения измеренных значений периода, разбив диапазон от 1,77 с до 1,83 с на 4 интервала. Определите, в какой интервал попало наибольшее число измерений.
3. Вычислите среднее арифметическое значение периода <T> по выборке и его теоретическое значение $T_{теор}$ для L = 0,80 м.
4. Оцените абсолютную и относительную погрешность определения ускорения свободного падения g по данным этого эксперимента. Используйте формулу g =

$4\pi^2 L$ / <T>². Погрешность <T> оцените как половину ширины интервала гистограммы, где сосредоточено большинство значений.

5. Опишите алгоритм (или нарисуйте блок-схему) для проверки гипотезы о нормальности распределения результатов измерений методом «трёх сигм»: вычисление среднего <T>, стандартного отклонения σ, и проверка, какая доля измерений попадает в интервал (<T> — 3σ, <T> + 3σ).

РЕШЕНИЯ

Дано:

L = 0,80 м, g = 9,81 м/с^2.

Массив T: [1,79; 1,81; 1,78; 1,80; 1,82; 1,79; 1,80; 1,81; 1,78; 1,80; 1,79; 1,81; 1,80; 1,79; 1,82; 1,80; 1,79; 1,80; 1,81; 1,80].

Вопрос 1:

Случайная погрешность — возникает из-за случайных факторов, меняется от измерения к измерению. Может быть уменьшена увеличением числа измерений (за счет усреднения).

Систематическая погрешность — постоянная или закономерно изменяющаяся, вызвана несовершенством метода или приборов. Увеличением числа измерений не уменьшается.

Вопрос 2:

Диапазон 1,77 – 1,83 с, 4 интервала:

1) 1,770 – 1,785
2) 1,785 – 1,800
3) 1,800 – 1,815
4) 1,815 – 1,830

Подсчет:

- 1,77-1,785: 1,78 (дважды: 3,9) → **2**
- 1,785-1,800: 1,79 (1,6,11,14,17) → **5**; 1,80 (4,7,10,13,16,18,20) → **7; Итого 12**
- 1,800-1,815: , 1,81 (2,8,12,19) → **4**
- 1,815-1,830: 1,82 (5,15 — два раза) → **2.**

Наибольшее число измерений (11) в интервале **1,785 – 1,80 с**.

Вопрос 3:

Среднее арифметическое:

Суммируем: 35,99.

$$\langle T \rangle = 35{,}99/20 = 1{,}7995 \approx 1{,}800 \text{ с}$$

Теоретический период:

$$T_{\text{теор}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}80}{9{,}81}} \approx 6{,}2832 \cdot \sqrt{0{,}08155} \approx 6{,}2832 \cdot 0{,}2856 \approx 1{,}794 \text{ с}$$

Вопрос 4:

Формула для g:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{\langle T \rangle^2} = \frac{4 \cdot 3{,}1416^2 \cdot 0{,}80}{3{,}24} \approx 9{,}75 \text{ м/с}^2$$

Погрешность $\langle T \rangle$ оценим как половину ширины интервала, где большинство значений. Интервал [1,785; 1,800] имеет ширину 0,015 с, половина = 0,0075 с.

Относительная погрешность $\frac{\Delta \langle T \rangle}{\langle T \rangle} = \frac{0{,}0075}{1{,}800} \approx 0{,}00417$.

Тогда относительная погрешность g: $\frac{\Delta g}{g} = 2 \cdot \frac{\Delta \langle T \rangle}{\langle T \rangle} = 0{,}01 = 0{,}83\%$

Абсолютная погрешность $\Delta g = 9{,}82 \cdot 0{,}01 \approx 0{,}08$ м/с^2.

Итак, g = 9,75 ± 0,08 м/с^2.

Вопрос 5:

Алгоритм метода трех сигм:

1. Вычислить среднее $\mu = \langle T \rangle$.
2. Вычислить стандартное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (T_i - \mu)^2}{n-1}}$$

3. Определить интервал $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.
4. Подсчитать количество измерений, попадающих в этот интервал.
5. Если доля попавших измерений близка к 99,7%, то распределение можно считать нормальным.

Матица оценивания задача 1 (10-11 класс): Вариант А и Б

Общая стоимость: 100 баллов.

Вопрос 1 (15 баллов)

Типы погрешностей.

- 7 баллов: четкое определение случайной погрешности (примеры, свойства).
- 8 баллов: четкое определение систематической погрешности (примеры, отличие от случайной).

Вопрос 2 (25 баллов)

Построение гистограммы/интервалов.

- 10 баллов: правильное разбиение диапазона на интервалы (равные, покрывающие все данные).
- 10 баллов: верный подсчет частот (попаданий) в каждый интервал.
- 5 баллов: указание модального интервала (с наибольшей частотой).

Вопрос 3 (20 баллов)

Среднее и теория.

- 7 баллов: верный расчет среднего арифметического (сумма/количество).
- 7 баллов: верная запись формулы теоретического периода.
- 6 баллов: верный расчет теоретического периода с подстановкой L и g.

Вопрос 4 (25 баллов)

Расчет g и погрешности.

- 5 баллов: верная запись рабочей формулы для g.
- 5 баллов: подстановка чисел и верное вычисление g.
- 5 баллов: оценка абсолютной погрешности периода ΔT (например, как полуширина модального интервала).
- 5 баллов: верный расчет относительной погрешности g (учет удвоения относительной погрешности периода).
- 5 баллов: запись финального ответа: g = <g> ± Δg.

Вопрос 5 (15 баллов)

Метод трех сигм.

- 5 баллов: вычисление среднего μ (или указание, что это первый шаг).
- 5 баллов: вычисление стандартного отклонения σ (формула).
- 5 баллов: описание критерия: интервал [μ-3σ; μ+3σ] и содержательный вывод о соответствии нормальному распределению (если ~99.7% точек внутри).

Задача 2 Вариант 1

На автоматизированной линии сборки работает промышленный робот с линейной осью (портал), которая перемещает инструмент между позициями. Контроллер робота использует трапецеидальный профиль скорости для планирования движения: ось последовательно разгоняется с постоянным ускорением, движется с постоянной скоростью, затем тормозит, имея при этом также постоянную величину ускорения. В процессе работы у робота возникла ошибка, которая привела к остановке линии сборки. Инженер по обслуживанию робота имеет информацию о следующих входных параметрах для робота:

- Требуемое перемещение: L = 0,60 м
- Максимальная скорость: v_{max}=1,2 м/с
- Ускорение: a=3,0 м/с²
- Ускорение разгона равно ускорению при торможении по модулю
- Контроллер выбирает профиль (трапеция или треугольник) автоматически

В некоторых случаях в зависимости от требуемого перемещения, трапецеидальный профиль скорости может переходить в треугольный. Определяется этот переход расстоянием, на которое необходимо переместиться роботу. Инженер скачал диагностические таблицы из памяти робота и получил данные о скорости оси каждые 0.1 с во время выполнения движения на L=0,60 м (см. Таблицу логов контроллера в приложении).

Задание 1

Вычислите критическое расстояние L_{crit} на котором совершается переход между профилями скорости для заданных ограничений:

- v_{max}=1,2 м/с
- a_{max}=3,0 м/с²

Определите, какой профиль использует контроллер для L=0,6 м. Обоснуйте результат.

Задание 2

а) Постройте график $v(t)$ по табличным данным.

б) По построенному графику найдите:

- Время разгона t_a
- Время торможения t_d
- Время движения с постоянной скоростью t_c
- Фактическое ускорение a

в) Вычислите путь L

г) Вычислите теоретическое время движения $T_{\text{теор}}$. Сравните $T_{\text{теор}}$ с соответствующим временем из таблицы.

Задание 3

По диагностическим данным стало понятно, что проблема с работой устройства может быть в прошивке контроллера. В приложении приведен псевдокод функции `calculate_move_time`. Найдите ошибки в псевдокоде и запишите исправленные строки. Для каждой ошибки коротко объясните, почему она является ошибкой (например, через размерность или физический смысл движения).

Задание 4

После исправления кода вычислите вручную:

а) Время T для L = 0,60 м, используя трапецеидальную ветку (заполните таблицу промежуточных значений)

б) Время T для L = 0,20 м, используя треугольную ветку (заполните таблицу промежуточных значений)

Задание 5.

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап

Междисциплинарные задачи

10-11 класс

На производственной линии требуется уменьшить время цикла для движения на L = 0,60 м. Какой параметр эффективнее увеличить: v_{max} или a_{max}? Обоснуйте ответ качественно.

Москва

2025/2026 уч. г.

Приложение 1

Таблица логов контроллера

№ (i)	t_i **(с)**	v_i **(м/с)**
0	0.0	0.00
1	0.1	0.30
2	0.2	0.60
3	0.3	0.90
4	0.4	1.20
5	0.5	1.20
6	0.6	1.20
7	0.7	0.90
8	0.8	0.60
9	0.9	0.30
10	1.0	0.00

Псевдокод функции планирования

Функция принимает (L), (v_{\max}), (a_{\max}) и возвращает время движения (T)[2]:

```
function calculate_move_time(L, v_max, a_max):
    # Критическое расстояние
    L_crit = v_max / a_max

    if L >= L_crit:
        # Трапецеидальный профиль
        t_accel = v_max / a_max
        t_decel = t_accel
```

```
    s_accel = 0.5 * a_max * t_accel^2
    s_decel = s_accel
    s_const = L - s_accel - s_decel
    t_const = s_const / v_max
    T = t_accel + t_const + t_decel
else:
    # Треугольный профиль
    v_peak = sqrt(a_max * L)
    t_accel = v_peak / a_max
    t_decel = t_accel
    T = t_accel + t_decel

return T
```

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
Заключительный этап
Междисциплинарные задачи
10-11 класс

Задача 2 Вариант 2

На автоматизированной линии сборки работает промышленный робот с линейной осью (портал), которая перемещает инструмент между позициями. Контроллер робота использует трапецеидальный профиль скорости для планирования движения: ось последовательно разгоняется с постоянным ускорением, движется с постоянной скоростью, затем тормозит, имея при этом также постоянную величину ускорения. В процессе работы у робота возникла ошибка, которая привела к остановке линии сборки. Инженер по обслуживанию робота имеет информацию о следующих входных параметрах для робота:

- Требуемое перемещение: L = 0,80 м
- Максимальная скорость: v_{max}=1,6 м/с
- Ускорение: a=4,0 м/с²
- Ускорение разгона равно ускорению при торможении по модулю
- Контроллер выбирает профиль (трапеция или треугольник) автоматически

В некоторых случаях в зависимости от требуемого перемещения, трапецеидальный профиль скорости может переходить в треугольный. Определяется этот переход расстоянием, на которое необходимо переместиться роботу. Инженер скачал диагностические таблицы из памяти робота и получил данные о скорости оси каждые 0.1 с во время выполнения движения на L=0,80 м (см. Таблицу логов контроллера в приложении).

Задание 1

Вычислите критическое расстояние L_{crit} на котором совершается переход между профилями скорости для заданных ограничений:

- v_{max}=1,6 м/с
- a_{max}=4,0 м/с²

Определите, какой профиль использует контроллер для L=0,8 м. Обоснуйте результат.

Москва
2025/2026 уч. г.

Задание 2

а) Постройте график $v(t)$ по табличным данным.

б) По построенному графику найдите:

- Время разгона t_a
- Время торможения t_d
- Время движения с постоянной скоростью t_c
- Фактическое ускорение a

в) Вычислите путь L

г) Вычислите теоретическое время движения $T_{\text{теор}}$. Сравните $T_{\text{теор}}$ с соответствующим временем из таблицы.

Задание 3

По диагностическим данным стало понятно, что проблема с работой устройства может быть в прошивке контроллера. В приложении приведен псевдокод функции `calculate_move_time`. Найдите ошибки в псевдокоде и запишите исправленные строки. Для каждой ошибки коротко объясните, почему она является ошибкой (например, через размерность или физический смысл движения).

Задание 4

После исправления кода вычислите вручную:

а) Время T для L = 0,80 м, используя трапецеидальную ветку (заполните таблицу промежуточных значений)

б) Время T для L = 0,20 м, используя треугольную ветку (заполните таблицу промежуточных значений)

Задание 5.

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап

Междисциплинарные задачи

10-11 класс

На производственной линии требуется уменьшить время цикла для движения на L = 0,80 м. Какой параметр эффективнее увеличить: v_{max} или a_{max}? Обоснуйте ответ качественно.

Москва

2025/2026 уч. г.

Приложение 1

Таблица логов контроллера

№ (i)	t_i (с)	v_i (м/с)
0	0.0	0.00
1	0.1	0.40
2	0.2	0.80
3	0.3	1.20
4	0.4	1.60
5	0.5	1.60
6	0.6	1.20
7	0.7	0.80
8	0.8	0.40
9	0.9	0.00

Псевдокод функции планирования

Функция принимает (L), (v_{\max}), (a_{\max}) и возвращает время движения (T)[2]:

```
function calculate_move_time(L, v_max, a_max):
    # Критическое расстояние
    L_crit = v_max / a_max

    if L >= L_crit:
        # Трапецеидальный профиль
        t_accel = v_max / a_max
        t_decel = t_accel
        s_accel = 0.5 * a_max * t_accel^2
```

```
    s_decel = s_accel
    s_const = L - s_accel - s_decel
    t_const = s_const / v_max
    T = t_accel + t_const + t_decel
else:
    # Треугольный профиль
    v_peak = sqrt(a_max * L)
    t_accel = v_peak / a_max
    t_decel = t_accel
    T = t_accel + t_decel

return T
```

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап

Междисциплинарные задачи

10-11 класс

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТ 1

Задание 1

Формула критического расстояния:

Критическое расстояние перехода от треугольного к трапецеидальному профилю определяется по формуле:

$$L_{\text{crit}}=\frac{v_{max}^2}{a_{max}}$$

Подставляем числовые значения:

$$L_{\text{crit}}=\frac{(1,2)^2}{3,0}=\frac{1,44}{3,0}=0,48 \text{ м}$$

Так как L=0,60 м >L_{crit}=0,48 м, контроллер использует **трапецеидальный профиль** скорости.

Задание 2

а) График (v(t))

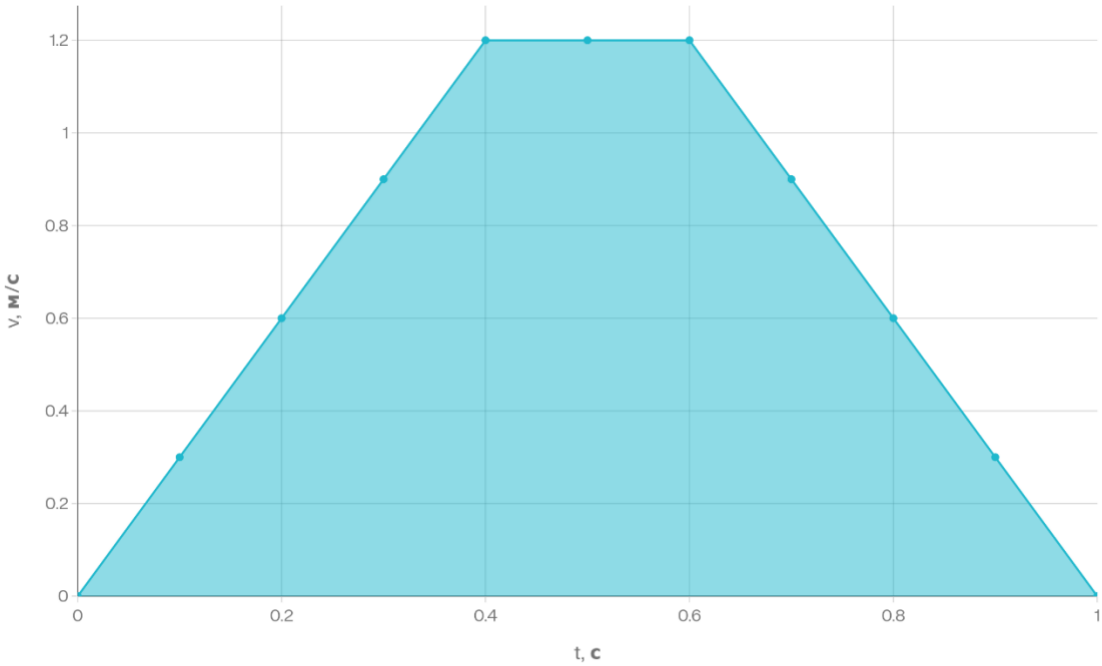

График представляет трапецеидальный профиль: разгон от 0 до 1,2 м/с за 0,4 с, движение с постоянной скоростью 0,2 с, торможение 0,4 с.

б) Определение временных интервалов и ускорения

Из графика:

- Время разгона: t_a=0,4 с
- Время движения с постоянной скоростью: t_c=0,2 с
- Время торможения: t_d=0,4 с

Фактическое ускорение:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{1{,}2\text{-}0}{0{,}4}=3{,}0 \text{ м/с}^2$$

в) Вычисление пути по графику

Путь на разгоне:

$$s_a=\frac{1}{2}at_a^2=\frac{1}{2}\cdot 3{,}0\cdot(0{,}4)^2=0{,}24 \text{ м}$$

Путь на участке постоянной скорости:

$$s_c = v_{max} t_c = 1{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}24 \text{ м}$$

Путь на торможении:

$$s_d = 0{,}24 \text{ м}$$

Суммарный путь по графику:

$$L_{\text{факт}} = s_a + s_c + s_d = 0{,}24 + 0{,}24 + 0{,}24 = 0{,}72 \text{ м}$$

Фактический путь по логам (0,72 м) не совпадает с заявленным в условии (0,60 м).

г) Теоретическое время движения

Для заданного перемещения $L = 0{,}60$ м:

Время разгона:

$$t_{\text{accel}} = \frac{v_{max}}{a_{max}} = \frac{1{,}2}{3{,}0} = 0{,}4 \text{ с}$$

Путь разгона и торможения:

$$s_{\text{accel}} = s_{\text{decel}} = \frac{1}{2} a_{max} t_{\text{accel}}^2 = 0{,}24 \text{ м}$$

Путь на участке постоянной скорости:

$$s_{\text{const}} = L - s_{\text{accel}} - s_{\text{decel}} = 0{,}60 - 0{,}24 - 0{,}24 = 0{,}12 \text{ м}$$

Время на участке постоянной скорости:

$$t_{\text{const}} = \frac{s_{\text{const}}}{v_{max}} = \frac{0{,}12}{1{,}2} = 0{,}1 \text{ с}$$

Полное теоретическое время:

$$T_{\text{теор}} = t_{\text{accel}} + t_{\text{const}} + t_{\text{decel}} = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}9 \text{ с}$$

По таблице логов полное время составляет 1,0 с, теоретическое — 0,9 с.

Задание 3.

Найденная ошибка:

Строка:

L_crit = v_max / a_max

Формула $L_{\text{crit}}=v_{max}/a_{max}$ имеет размерность времени (с), а не длины (м).

Исправленная строка:

L_crit = v_max^2 / a_max

Критическое расстояние должно иметь размерность длины. Правильная формула: $L_{\text{crit}}=\frac{v_{max}^2}{a_{max}}$, что даёт $\frac{(\text{м/с})^2}{\text{м/с}^2}$=м.

Задание 4. Ручная трассировка алгоритма

а) Для L=0,60 м (трапецеидальный профиль)

Величина	Значение
L_{crit}	0,48 м
Выбор профиля	Трапеция (0,60 ≥ 0,48)
t_{accel}	0,4 с
t_{decel}	0,4 с
s_{accel}	0,24 м
s_{decel}	0,24 м
s_{const}	0,12 м
t_{const}	0,1 с

T (полное время)	0,9 с

б) Для L=0,20 м (треугольный профиль)

Величина	Значение
L_{crit}	0,48 м
Выбор профиля	Треугольник (0,20<0,48)
v_{peak}	$\sqrt{3{,}0 \cdot 0{,}20}$=$\sqrt{0{,}6} \approx 0{,}775$ м/с
t_{accel}	0,775/3,0 $\approx$ 0,258 с
t_{decel}	0,258 с
s_{const}	0 м
t_{const}	0 с
T (полное время)	0,258+0,258 $\approx$ 0,516 с

Задание 5

Для трапецеидального профиля движения полное время складывается из трёх фаз:

$$T = t_{\text{accel}} + t_{\text{const}} + t_{\text{decel}}$$

где t_{accel} — время разгона, t_{const} — время движения с постоянной скоростью, t_{decel} — время торможения.

Из условия задачи и псевдокода функции `calculate_move_time` известно, что:

$$t_{\text{accel}} = \frac{v_{max}}{a_{max}},\ t_{\text{decel}} = t_{\text{accel}}$$

Следовательно, суммарное время на разгон и торможение:

$$t_{\text{accel}}+t_{\text{decel}}=2\cdot\frac{v_{max}}{a_{max}}$$

В таком случае, путь, пройденный при равноускоренном движении:

$$s_{\text{accel}}=\frac{1}{2}a_{max}t_{\text{accel}}^2$$

Подставляя $t_{\text{accel}}=\frac{v_{max}}{a_{max}}$:

$$s_{\text{accel}}=\frac{1}{2}a_{max}\left(\frac{v_{max}}{a_{max}}\right)^2=\frac{v_{max}^2}{2a_{max}}$$

Аналогично, путь торможения:

$$s_{\text{decel}}=\frac{v_{max}^2}{2a_{max}}$$

Общее перемещение L распределяется между тремя фазами:

$$L=s_{\text{accel}}+s_{\text{const}}+s_{\text{decel}}$$

Откуда:

$$s_{\text{const}}=L-s_{\text{accel}}-s_{\text{decel}}=L-\frac{v_{max}^2}{2a_{max}}-\frac{v_{max}^2}{2a_{max}}=L-\frac{v_{max}^2}{a_{max}}$$

На участке постоянной скорости $v=v_{max}$, следовательно:

$$t_{\text{const}}=\frac{s_{\text{const}}}{v_{max}}=\frac{L-\frac{v_{max}^2}{a_{max}}}{v_{max}}=\frac{L}{v_{max}}-\frac{v_{max}}{a_{max}}$$

Суммируем все три фазы:

$$T=t_{\text{accel}}+t_{\text{const}}+t_{\text{decel}}$$

$$T=\frac{v_{max}}{a_{max}}+\left(\frac{L}{v_{max}}-\frac{v_{max}}{a_{max}}\right)+\frac{v_{max}}{a_{max}}$$

Упрощаем:

$$T=\frac{L}{v_{max}}+\frac{v_{max}}{a_{max}}$$

Полученная формула содержит два слагаемых:

- $\frac{L}{v_{max}}$ — время, которое потребовалось бы для прохождения всего пути на максимальной скорости без учёта разгона и торможения. Это основное время движения.
- $\frac{v_{max}}{a_{max}}$ — дополнительное время, связанное с необходимостью разгона до максимальной скорости и последующего торможения. Это слагаемое отображает время, потерянное на разгон до максимальной скорости.

При этом для v_{max} можно отметить следующие факты:

- Входит в оба слагаемых
- Увеличение v_{max} уменьшает первое слагаемое (основное время)
- Увеличение v_{max} увеличивает второе слагаемое (время разгона/торможения)
- Для достаточно больших L эффект первого слагаемого доминирует

Для a_{max} соответственно:

- Входит только во второе слагаемое
- Увеличение a_{max} уменьшает только время разгона и торможения
- Не влияет на основное время движения

Для движения на L=0,60 м в трапецеидальном режиме эффективнее увеличивать v_{max}, так как это изменение влияет на основную часть времени движения $\frac{L}{v_{max}}$, при достаточно длинных перемещениях основное время преобладает над временем разгона/торможения, а увеличение a_{max} уменьшает только «краевые» фазы движения. Однако можно заметить, что при малых перемещениях, когда фаза постоянной скорости короткая, влияние будет недостаточно существенно, чтобы значительно повысить эффективность перемещения.

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТ 2

Задание 1

Задание 1. Критическое расстояние и выбор профиля

Критическое расстояние:

$$L_{\text{crit}}=\frac{v_{max}^2}{a_{max}}=\frac{(1,6)^2}{4,0}=\frac{2,56}{4,0}=0,64 \text{ м}$$

Так как L=0,80 м >L_{crit}=0,64 м, контроллер использует **трапецеидальный профиль** скорости.

Задание 2. Анализ графика скорости

а) График $v(t)$ по табличным данным

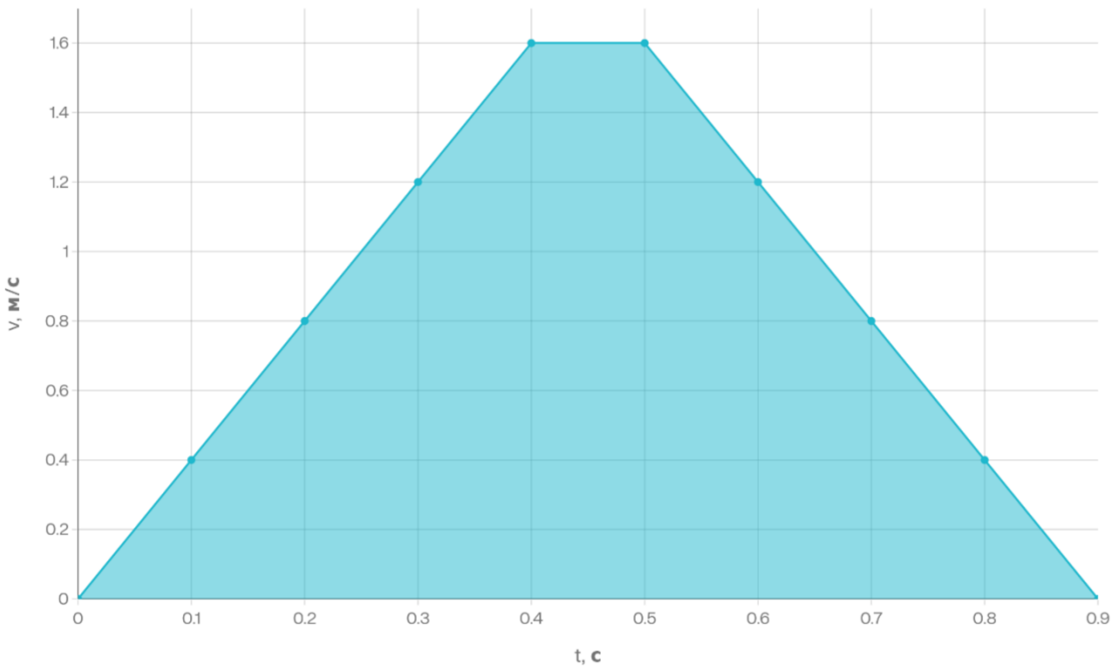

График представляет трапецеидальный профиль: разгон от 0 до 1,6 м/с за 0,4 с, движение с постоянной скоростью 0,1 с, торможение 0,4 с.

б) Определение временных интервалов и ускорения

Из графика:

- Время разгона: t_a=0,4 с
- Время движения с постоянной скоростью: t_c=0,1 с
- Время торможения: t_d=0,4 с

Фактическое ускорение:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{1{,}6\text{-}0}{0{,}4}=4{,}0\ \text{м/с}^2$$

в) Вычисление пути по графику

Путь на разгоне:

$$s_a=\frac{1}{2}at_a^2=\frac{1}{2}\cdot 4{,}0\cdot(0{,}4)^2=0{,}32\ \text{м}$$

Путь на участке постоянной скорости:

$$s_c=v_{max}t_c=1{,}6\cdot 0{,}1=0{,}16\ \text{м}$$

Путь на торможении:

$$s_d=0{,}32\ \text{м}$$

Суммарный путь по графику:

$$L_{\text{факт}}=s_a+s_c+s_d=0{,}32+0{,}16+0{,}32=0{,}80\ \text{м}$$

Фактический путь по логам (0,80 м) совпадает с заявленным в условии.

г) Теоретическое время движения

Для заданного перемещения L=0,80 м:

Время разгона:

$$t_{\text{accel}}=\frac{v_{max}}{a_{max}}=\frac{1{,}6}{4{,}0}=0{,}4\ \text{с}$$

Путь разгона и торможения:

$$s_{\text{accel}}=s_{\text{decel}}=\frac{1}{2}a_{max}t_{\text{accel}}^2=0{,}32 \text{ м}$$

Путь на участке постоянной скорости:

$$s_{\text{const}}=L\text{-}s_{\text{accel}}\text{-}s_{\text{decel}}=0{,}80\text{-}0{,}32\text{-}0{,}32=0{,}16 \text{ м}$$

Время на участке постоянной скорости:

$$t_{\text{const}}=\frac{s_{\text{const}}}{v_{max}}=\frac{0{,}16}{1{,}6}=0{,}1 \text{ с}$$

Полное теоретическое время:

$$T_{\text{теор}}=t_{\text{accel}}+t_{\text{const}}+t_{\text{decel}}=0{,}4+0{,}1+0{,}4=0{,}9 \text{ с}$$

По таблице логов полное время составляет 0,9 с, что совпадает с теоретическим расчётом.

Задание 3

Найденная ошибка:

Строка:

L_crit = v_max / a_max

Формула имеет размерность времени (с), а не длины (м).

Исправленная строка:

L_crit = v_max^2 / a_max

Правильная формула: $L_{\text{crit}}=\frac{v_{max}^2}{a_{max}}$.

Задание 4.

а) Для L=0,80 м (трапецеидальный профиль)

Величина	Значение
L_{crit}	0,64 м
Выбор профиля	Трапеция $(0{,}80 \geq 0{,}64)$
t_{accel}	0,4 с
t_{decel}	0,4 с
s_{accel}	0,32 м
s_{decel}	0,32 м
s_{const}	0,16 м
t_{const}	0,1 с
T (полное время)	0,9 с

б) Для L=0,20 м (треугольный профиль)

Величина	Значение
L_{crit}	0,64 м
Выбор профиля	Треугольник (0,20<0,64)
v_{peak}	$\sqrt{4{,}0 \cdot 0{,}20}$=$\sqrt{0{,}8} \approx 0{,}894$ м/с
t_{accel}	$0{,}894/4{,}0 \approx 0{,}224$ с
t_{decel}	0,224 с
s_{const}	0 м
t_{const}	0 с

T (полное время)	0,224+0,224 ≈ 0,447 с

Задание 5

Для трапецеидального профиля движения полное время складывается из трёх фаз:

$$T = t_{\text{accel}} + t_{\text{const}} + t_{\text{decel}}$$

где t_{accel} — время разгона, t_{const} — время движения с постоянной скоростью, t_{decel} — время торможения.

Из условия задачи и псевдокода функции `calculate_move_time` известно, что:

$$t_{\text{accel}} = \frac{v_{max}}{a_{max}},\ t_{\text{decel}} = t_{\text{accel}}$$

Следовательно, суммарное время на разгон и торможение:

$$t_{\text{accel}} + t_{\text{decel}} = 2 \cdot \frac{v_{max}}{a_{max}}$$

В таком случае, путь, пройденный при равноускоренном движении:

$$s_{\text{accel}} = \frac{1}{2} a_{max} t_{\text{accel}}^2$$

Подставляя $t_{\text{accel}} = \frac{v_{max}}{a_{max}}$:

$$s_{\text{accel}} = \frac{1}{2} a_{max} \left(\frac{v_{max}}{a_{max}}\right)^2 = \frac{v_{max}^2}{2a_{max}}$$

Аналогично, путь торможения:

$$s_{\text{decel}} = \frac{v_{max}^2}{2a_{max}}$$

Общее перемещение L распределяется между тремя фазами:

$$L = s_{\text{accel}} + s_{\text{const}} + s_{\text{decel}}$$

Откуда:

$$s_{\text{const}}=L\text{-}s_{\text{accel}}\text{-}s_{\text{decel}}=L\text{-}\frac{v_{max}^2}{2a_{max}}\text{-}\frac{v_{max}^2}{2a_{max}}=L\text{-}\frac{v_{max}^2}{a_{max}}$$

На участке постоянной скорости v=v_{max}, следовательно:

$$t_{\text{const}}=\frac{s_{\text{const}}}{v_{max}}=\frac{L\text{-}\frac{v_{max}^2}{a_{max}}}{v_{max}}=\frac{L}{v_{max}}\text{-}\frac{v_{max}}{a_{max}}$$

Суммируем все три фазы:

$$T=t_{\text{accel}}+t_{\text{const}}+t_{\text{decel}}$$

$$T=\frac{v_{max}}{a_{max}}+\left(\frac{L}{v_{max}}\text{-}\frac{v_{max}}{a_{max}}\right)+\frac{v_{max}}{a_{max}}$$

Упрощаем:

$$T=\frac{L}{v_{max}}+\frac{v_{max}}{a_{max}}$$

Полученная формула содержит два слагаемых:

- $\frac{L}{v_{max}}$ — время, которое потребовалось бы для прохождения всего пути на максимальной скорости без учёта разгона и торможения. Это основное время движения.
- $\frac{v_{max}}{a_{max}}$ — дополнительное время, связанное с необходимостью разгона до максимальной скорости и последующего торможения. Это слагаемое отображает время, потерянное на разгон до максимальной скорости.

При этом для v_{max} можно отметить следующие факты:

- Входит в оба слагаемых
- Увеличение v_{max} уменьшает первое слагаемое (основное время)
- Увеличение v_{max} увеличивает второе слагаемое (время разгона/торможения)

- Для достаточно больших L эффект первого слагаемого доминирует

Для a_{max} соответственно:

- Входит только во второе слагаемое
- Увеличение a_{max} уменьшает только время разгона и торможения
- Не влияет на основное время движения

Для движения на L=0,80 м в трапецеидальном режиме эффективнее увеличивать v_{max}, так как это изменение влияет на основную часть времени движения $\frac{L}{v_{max}}$, при достаточно длинных перемещениях основное время преобладает над временем разгона/торможения, а увеличение a_{max} уменьшает только «краевые» фазы движения. Однако можно заметить, что при малых перемещениях, когда фаза постоянной скорости короткая, влияние будет недостаточно существенно, чтобы значительно повысить эффективность перемещения.

Матрица оценивания Задача 2 Вариант 1-2

Критерий	**Балл**
1.1 Получена формула для L_crit	8
1.2 Правильное численное значение	2
1.3 Сделан вывод, что профиль трапециевидный	5
2А Правильное построение графика v(t): -правильная кривая подписанные оси и масштаб	 10 5
2Б За каждый из расчетных пунктов	1 (максимум 4 балла)
2В Длина как площадь под графиком Найдено численное значение	3 3
2Г найдено время на участке разгона . найдено время на участке постоянной скорости . найдено время на участке торможения . найдено суммарное время	1 2 1 1
3.1 Найдена ошибка с обоснованием	5
3.2 Исправлена ошибка	5
4А1 За каждое найденное значение из псевдокода (включая L_crit), кроме времени T (7 расчетных элементов)	1 (максимум 7 баллов)
4А2 Найдено время T	8
4Б1 За каждое найденное значение из псевдокода (включая L_crit), кроме времени T (4 расчетных элемента)	2 (максимум 8 баллов)
4Б2 Найдено время T	7
5.1 Найдено приближённое время движения T	10
5.2 Сделан вывод об эффективности увеличения v_max	5

Задача 3. Вариант 1

Дан массив data[1…n] все элементы которого – цифры от 0 до 5. Опишите алгоритм нахождения максимально возможного числа, составленного из цифр массива, которое делилось бы на 3. Сложность алгоритма по времени должна быть O(n). Сложность по потребляемой памяти – O(const).

Решение:

Очевидно, что выгодно собирать итоговое число, чтобы пятерки стояли в старших разрядах, а нули в младших. Т.е. число вида 555…44…000. Заведем шесть переменных (a0, a1, a2, a3, a4, a5), каждая из которых будет отвечать за количество соответствующей цифры в массиве.

Введем сумму всех цифр S = a0 * 0 + a1 * 1 + a2 * 2 + a3 * 3 + a4 * 4 + a5 * 5. И посмотрим остаток от деления S на 3.

1) Если остаток равен 0, то получаем ответ в виде 5555…444……00
2) Если остаток равен 1, то выгодно выкинуть одну единицу, если a1 отлично от нуля. Если же a1 = 0. Ну нужно набрать остаток в единицу с других цифр. Для этого проверим четверки. Если a4 отлично от нуля, то выкинем из ответа одну четверку. Если же a4 = 0, то необходимо выкинуть из ответа две цифры – либо двойки, либо пятёрки, поскольку их сумма при делении даёт остаток 1. Выгодно выбрасывать цифры в следующем порядке, в зависимости от их наличия: 22, 25, 55.
3) Если остаток равен 2, то выгодно вычеркнуть двойку. Если a2 = 0, то необходимо вычеркнуть пятёрку. Если a5 = 0, то необходимо посмотреть на переменные a1 и a4 для исключения двух цифр. Выгодно избавляться в таком порядке: 11, 14, 44.

Задача 3. Вариант 2

Дан массив data[1…n] все элементы которого – цифры от 3 до 8. Опишите алгоритм нахождения максимально возможного числа, составленного из цифр массива, которое делилось бы на 3. Сложность алгоритма по времени должна быть O(n). Сложность по потребляемой памяти – O(const).

Решение:

Очевидно, что выгодно собирать итоговое число, чтобы восьмерки стояли в старших разрядах, а тройки в младших. Т.е. число вида 888…77…3333. Заведем шесть переменных (a3, a4, a5, a6, a7, a8), каждая из которых будет отвечать за количество соответствующей цифры в массиве.

Введем сумму всех цифр S = a3 * 3 + a4 * 4 + a5 * 5 + a6 * 6 + a7 * 7 + a8 * 8. И посмотрим остаток от деления S на 3.

1) Если остаток равен 0, то получаем ответ в виде 888…777……333
2) Если остаток равен 1, то выгодно выкинуть одну четвёрку, если a4 отлично от нуля. Если же a4 = 0, то нужно набрать остаток в единицу с других цифр. Для этого проверим семерки. Если a7 отлично от нуля, то выкинем из ответа одну семерку. Если же a7 = 0, то необходимо выкинуть из ответа две цифры – либо пятёрки, либо восьмерки, поскольку их сумма при делении даёт остаток 1. Выгодно выбрасывать цифры в следующем порядке, в зависимости от их наличия: 55, 58, 88.
3) Если остаток равен 2, то выгодно вычеркнуть пятёрку. Если a5 = 0, то необходимо вычеркнуть восьмерку. Если a8 = 0, то необходимо посмотреть на переменные a4 и a7 для исключения двух цифр. Выгодно избавляться в таком порядке: 44, 47, 77.

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап
Междисциплинарные задачи
10-11 класс

Матрица оценивания Задача 3 Вариант 1-2	Балл	Комментарий
В алгоритме используется одновременно сортировка исходного массива И вводится дополнительный массив для хранения данных (за исключением случая, когда вводится массив для хранения ограниченного числа переменных для подсчёта указанных в эталонном решении значений)	10	Дальше не проверяем, 5 баллов если не решена, по пытался решить с помощью сортировки и доп массива
В алгоритме используется ЛИБО сортировка исходного массива ЛИБО вводится дополнительный массив для хранения данных (за исключением случая, когда вводится массив для хранения ограниченного числа переменных для подсчёта указанных в эталонном решении значений)	20	Дальше не проверяем, 10 баллов если не решена, по пытался решить с помощью сортировки ИЛИ доп массива Использование сортировки приводит к нарушению условия сложности алгоритма по времени. Никакая сортировка не обладает линейной сложностью. Если используется дополнительный массив для подсчёта указанных четырёх значений в эталонном решении — такое допустимо. Однако использование дополнительного массива для сбора промежуточных параметров нарушает требования алгоритма по используемой памяти.
Требования по памяти и сложности алгоритма удовлетворены. Рассмотрены основные исходы с делимостью без учета подвариантов.	40	Пункты 1-4 эталонного решения. За каждый отсутствующий пункт - минус 5 баллов
Требования по памяти и сложности алгоритма удовлетворены. Рассмотрены ВСЕ основные исходы с делимостью, и рассмотрены все возможные подварианты	85	Подварианты 2а, 2б, 2в, 3а, 3б, 3в, 4а, 4б, 4в эталонного решения. За каждый отсутствующий подвариант - минус 5 баллов.
Требования по памяти и сложности алгоритма выполнены. Рассмотрены все основные исходы с делимостью, и все возможные подварианты. Указан невозможны случай, но без конкретного примера.	90	Если все предыдущее верно.
Задача полностью решена	100	