

МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ. РОБОТОТЕХНИКА. 2024–2025
УЧ. Г. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП. 10–11 КЛАССЫ
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Максимальный балл за работу – 50.

Уважаемые участники!

Для задач №1 и №2 достаточно привести только ответ. Для задач с №3 по №6 приведите подробное решение. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Для точного ответа округление стоит производить только при получении финального результата.

1. В попытке участвовали роботы Аз, Буки, Веди, Глаголь, Добро. У роботов два, три, четыре, пять и шесть колёс. Среди роботов нет двух таких, у которых одинаковое число колёс. Известно, что:

- у робота Аз больше колёс, чем у робота Буки и чем у робота Веди
- в отличие от робота Аз, у роботов Буки и Глаголь чётное число колёс
- у робота Буки больше колёс, чем у роботов Веди и Глаголь

Определите, сколько колёс у каждого из роботов. В ответ запишите последовательность заглавных букв, соответствующих первым буквам названий роботов, в порядке **уменьшения** числа колёс, например АБВГД.

Ответ: ДАБВГ

За верный ответ – 5 баллов.

Решение

Раз у роботов Буки и Глаголь – чётное число колёс, то у робота Аз – нечётное число колёс. Отметим это в таблице.

	А	Б	В	Г	Д
2	–				
3		–		–	
4	–				
5		–		–	
6	–				

Так как у робота Аз больше колёс, чем у робота Буки и чем у робота Веди и у Аз нечётное число колёс, то у Аз – 5 колёс. Отметим это в таблице.

	А	Б	В	Г	Д
2	–				
3	–	–		–	
4	–				
5	+	–	–	–	–
6	–	–	–		

Поскольку у робота Буки больше колёс, чем у роботов Веди и Глаголь, то у Буки – 4 колеса. Отметим это в таблице.

	А	Б	В	Г	Д
2	–	–	–	+	–
3	–	–	+	–	–
4	–	+	–	–	–
5	+	–	–	–	–
6	–	–	–	–	+

Расположим первые буквы названий роботов в порядке уменьшения числа колёс, от большему к меньшему. Получим ответ ДАБВГ.

№ п/п	Критерий	Баллы
1	Приведён верный ответ (ДАБВГ)	5
2	Во всех других случаях	0

2. Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами диаметра 9 см. Колёса напрямую подсоединены к моторам. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В. Ширина колеи равна 2 дм 7 см. Моторы так закреплены на роботе, что если оба мотора повернутся на 10° , то робот поедет прямо вперёд.

Робот выполнил последовательно следующие действия:

- 1) мотор В повернулся на 540° , и при этом мотор А был выключен;
- 2) мотор А повернулся на 540° , и при этом мотор В был выключен;
- 3) мотор А повернулся на 270° , и одновременно с этим мотор В повернулся на (-270°).

Определите, на каком расстоянии от своего первоначального положения оказалась точка, расположенная в центре колеса А, после окончания третьего действия. Ответ дайте в сантиметрах, приведя результат с точностью до целых.

Ответ: 43 см

За верный ответ – 5 баллов.

Решение

$$2 \text{ дм } 7 \text{ см} = 27 \text{ см}$$

Радиус колеса робота:

$$9 \text{ см} : 2 = 4,5 \text{ см}$$

Обозначим точку, расположенную в центре колеса А, как точку А.

При первом движении робота точка А будет совершать поворот вокруг своей оси.

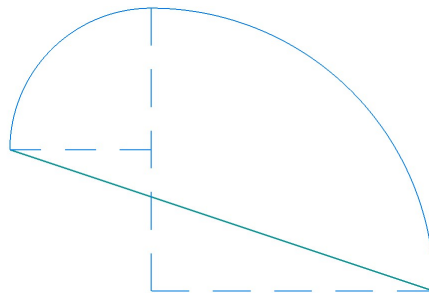
При втором повороте робот повернётся вокруг колеса В на угол:

$$\frac{540^\circ \cdot 4,5}{27} = 90^\circ$$

Определим угол, на который повернётся робот при танковом повороте.

$$\frac{270^\circ \cdot 4,5}{27 : 2} = 90^\circ$$

Изобразим траекторию движения точки А.



Тогда модуль перемещения точки А равен:

$$\sqrt{(27 - 13,5)^2 + (27 + 13,5)^2} = 42,690... \approx 43 \text{ см}$$

№ п/п	Критерий	Баллы
1	Приведён верный ответ (43 см)	5
2	Дан верный ответ, но в неверных единицах измерения	3
3	Во всех других случаях	0

3. Из нескольких шестерёнок и мотора Вася собрал трёхступенчатую передачу. На оси мотора находится шестерёнка с 12 зубьями, на ведомой оси первой ступени – шестерёнка с 36 зубьями, на ведущей оси второй ступени – шестерёнка с 45 зубьями, на ведомой оси второй ступени – шестерёнка с 25 зубьями, на ведущей оси третьей ступени – шестерёнка с 45 зубьями, на ведомой оси передачи – шестерёнка с 15 зубьями.

На ведомую ось передачи Вася посадил сделанные из картона лопасти вентилятора.

А. Определите, во сколько раз ведомая ось передачи вращается быстрее, чем ось мотора. Ответ дайте в виде десятичной дроби.

Ответ: в 1,8 раза быстрее

За верный ответ – 5 баллов.

Б. После включения программы лопасти начали совершать по 5 оборотов за 2 секунды. Определите, сколько оборотов совершит ось мотора за 3 минуты.

Ответ: 250 оборотов

За верный ответ – 5 баллов.

Решение

Определим, во сколько раз ведомая ось передачи вращается быстрее, чем ось мотора.

$$\frac{12}{36} \cdot \frac{45}{25} \cdot \frac{45}{15} = \frac{12 \cdot 45 \cdot 45}{36 \cdot 25 \cdot 15} = \frac{9}{5} = 1,8$$

Определим число оборотов, которое совершит ось мотора за две минуты.

$$\frac{5 \cdot 60}{2 \cdot 1,8} \cdot 3 = 250 \text{ (об.)}$$

№ п/п	Критерий	Баллы
Пункт А		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (в 1,8 раз быстрее)	5
2	Приведён только верный ответ (в 1,8 раз быстрее)	3
3	В остальных случаях	0
Пункт Б		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (250 об.)	5
2	Приведён только верный ответ (250 об.)	3
3	В остальных случаях	0

4. Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, диаметр каждого из колёс робота равен 12 см. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В. Колёса напрямую подсоединены к моторам. Ширина колеи робота равна 24 см.

Посередине между колёс робота закреплена кисть. Робот с помощью кисти начертил правильный пятиугольник АВСЕН. При проезде по стороне АВ оси моторов повернулись на 3000° .

А. Определите длину стороны АВ. Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целых.

Ответ: 314 см

За верный ответ – 5 баллов.

Б. Определите площадь пятиугольника АВСЕН. Ответ дайте в квадратных дециметрах, округлив результат *до ближайшего большего целого*.

Ответ: 1697 дм²

За верный ответ – 5 баллов.

Справочная информация

$\sin 27^\circ = 0,453990\dots$; $\cos 27^\circ = 0,891007\dots$

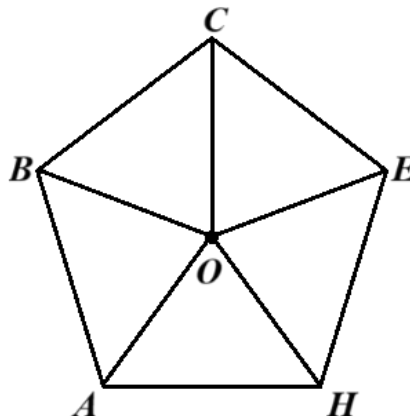
$\sin 36^\circ = 0,587785\dots$; $\cos 36^\circ = 0,809016\dots$

Решение

Рассчитаем длину стороны равностороннего пятиугольника АВСЕН.

$$\frac{3000^\circ}{360^\circ} \cdot 12\pi = 100\pi = 314 \text{ (см)}$$

Для подсчёта площади воспользуемся методом триангуляции фигуры – разделим фигуру на пять равных треугольников. Для этого сделаем чертёж. Обозначим точку – центр описанной окружности как О. Соединим центр описанной вокруг пятиугольника окружности с его вершинами.



Так как все радиусы одной окружности равны между собой, а стороны пятиугольника равны между собой, пятиугольник – правильный. Значит, все пять треугольников равны между собой и имеют равные площади. Значит, все пять углов с вершиной в точке О равны между собой.

$$\angle BOC = 360^\circ : 5 = 72^\circ, \text{ тогда } \angle BCO = (180^\circ - 72^\circ) : 2 = 54^\circ.$$

По теореме синусов:

$$\frac{BO}{\sin 54^\circ} = \frac{BC}{\sin 72^\circ}$$

$$BO = BC \frac{\sin 54^\circ}{\sin 72^\circ}$$

Площадь треугольника BOC равна:

$$\begin{aligned} 0,5 \cdot BO \cdot CO \cdot \sin 72^\circ &= \frac{1}{2} BC \frac{\sin 54^\circ}{\sin 72^\circ} \cdot BC \frac{\sin 54^\circ}{\sin 72^\circ} \cdot \sin 72^\circ = \\ &= \frac{(BC \cdot \sin 54^\circ)^2}{2 \sin 72^\circ} \end{aligned}$$

Площадь пятиугольника равна:

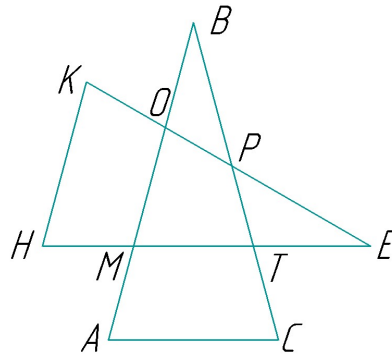
$$\frac{5(BC \cdot \sin 54^\circ)^2}{2 \sin 72^\circ} = \frac{5 \cdot (314 \cdot \sin 54^\circ)^2}{2 \sin 72^\circ} = 169632,1897... (см^2)$$

Переведём в квадратные дециметры и округлим до **ближайшего большего целого**.

$$169632,1897... см^2 = 1696,321897... дм^2 \approx 1697 дм^2$$

№ п/п	Критерий	Баллы
Пункт А		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (314 см)	5
2	Приведён только верный ответ (314 см)	3
3	Ответ приведён не с требуемой точностью	-1
4	Ответ приведён не в требуемых единицах измерения	-1
5	В остальных случаях	0
Пункт Б		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (1697 дм ²)	5
2	Приведён только верный ответ (1697 дм ²)	3
3	Ответ приведён не с требуемой точностью	-1
4	Ответ приведён не в требуемых единицах измерения	-1
5	В остальных случаях	0

5. Робот-чертёжник движется по ровной горизонтальной поверхности и наносит на неё изображение (см. *Рисунок*) при помощи кисти, закреплённой посередине между колёс.



Рисунок

Известно, что $AB = BC$, $EK = EH$, $AC \parallel HE$, $KH \parallel AB$, $\angle BPO = 30^\circ$.

Все повороты робот должен совершать на месте. Робот не может ехать назад. Робот должен проехать по каждому отрезку траектории ровно по одному разу.

А. Определите величину угла В. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 40°

За верный ответ – 5 баллов.

Б. Определите минимальный суммарный угол поворота робота, на который он должен повернуться при проезде по всей траектории. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 640°

За верный ответ – 5 баллов.

Справочная информация

Под суммарным углом поворота понимается сумма величин углов поворотов, при этом направление поворотов робота не учитывается.

Решение

Чтобы определить угол поворота робота, надо определить градусные меры углов.

$$\angle BPO = \angle TPE = 30^\circ, \angle OPT = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

Обозначим за x градусную меру $\angle B$.

$$\text{Так как } AB = BC, \text{ то } \angle A = \angle C = (180^\circ - x) : 2 = 90^\circ - \frac{x}{2}.$$

$$\text{Так как } AC \parallel HE, \text{ то } \angle PTM = \angle C = \angle A = \angle OMT = 90^\circ - \frac{x}{2}.$$

$$\text{Так как } EK = EH, \text{ то } \angle K = \angle H.$$

$$\text{Так как } KH \parallel MO, \text{ то } \angle OMT = \angle H = \angle K = \angle MOP = 90^\circ - \frac{x}{2}.$$

Так как $KH \parallel MO$, то $\angle KOM = 180^\circ - \angle K = 180^\circ - (90^\circ - \frac{x}{2}) = 90^\circ + \frac{x}{2}$.

$$\angle KOM = \angle BOR = 90^\circ + \frac{x}{2}.$$

Так как сумма углов треугольника равна 180° , то:

$$\angle E + \angle K + \angle H = \angle E + 90^\circ - \frac{x}{2} + 90^\circ - \frac{x}{2} = 180^\circ$$

$$\angle E = x$$

Так как сумма углов треугольника равна 180° , то:

$$30^\circ + x + 90^\circ + \frac{x}{2} = 180^\circ$$

$$x = 40^\circ.$$

То есть $\angle B = \angle E = 40^\circ$.

$$\angle PTM = \angle C = \angle A = \angle H = \angle K = \angle OMT = 90^\circ - \frac{x}{2} = 70^\circ.$$

$$\angle BOR = \angle KOM = \angle HMO = \angle AMT = \angle MTC = \angle PTE = 90^\circ + \frac{x}{2} = 110^\circ.$$

Сумма углов поворота робота зависит от точки старта. Направление обхода траектории не имеет значения. По условию задачи робот не может ехать назад.

В качестве точки старта выгоднее всего выбрать вершину угла, градусная мера которого минимальна из указанных углов, то есть выгоднее стартовать в вершине Е или в вершине В. Для определённости выберем в качестве точки старта вершину В. Для старта в вершине Е все рассуждения будут аналогичны.

Чтобы минимизировать угол поворота, мы будем проезжать через вершины О, Т, М насквозь, не останавливаясь и не поворачиваясь в них. При этом нам достаточно повернуться дважды в вершине Р, чтобы перейти от вычерчивания одного треугольника к вычерчиванию второго треугольника. В данном случае вершина Р выбрана из расчёта, что угол поворота в ней будет минимальным и равен градусной мере $\angle EPT = 30^\circ$. Посещать вершины мы будем в следующем порядке В – Р – Е – Н – К – Р – С – А – В. Для обратного порядка посещения вершин решение будет тем же.

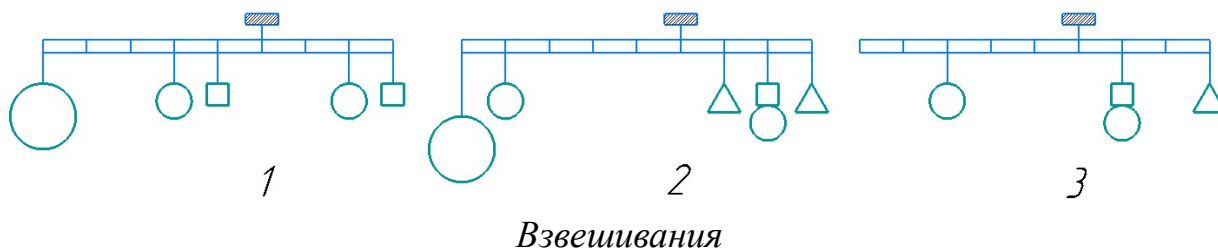
Посчитаем градусную меру минимального суммарного угла поворота.

$$30^\circ + (180^\circ - 40^\circ) + (180^\circ - 70^\circ) + (180^\circ - 70^\circ) + \\ + 30^\circ + (180^\circ - 70^\circ) + (180^\circ - 70^\circ) = 640^\circ.$$

№ п/п	Критерий	Баллы
Пункт А		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (40°)	5
2	Приведён только верный ответ (40°)	3
3	В остальных случаях	0
Пункт Б		

1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (640°)	5
2	Приведён только верный ответ (640°)	3
3	В остальных случаях	0

6. В наборе есть два шара разного размера, несколько одинаковых кубов и несколько одинаковых треугольных пирамид. С помощью неравноплечных весов (упругую балку подвесили на штатив) элементы из набора смогли уравновесить. Произвели три взвешивания (см. *Взвешивания*).



Взвешивания

Для удобства использования весов поперёк балки сделали засечки, расположенные на равном расстоянии друг от друга.

Масса одной пирамиды равна 50 г. Масса балки равномерно распределена вдоль всей балки и равна 200 г. Массой крепёжных элементов можно пренебречь.

А. Определите массу одного куба. Ответ дайте в граммах.

Ответ: 250 г

За верный ответ – 5 баллов.

Б. Определите массу шара большего размера. Ответ дайте в граммах.

Ответ: 60 г

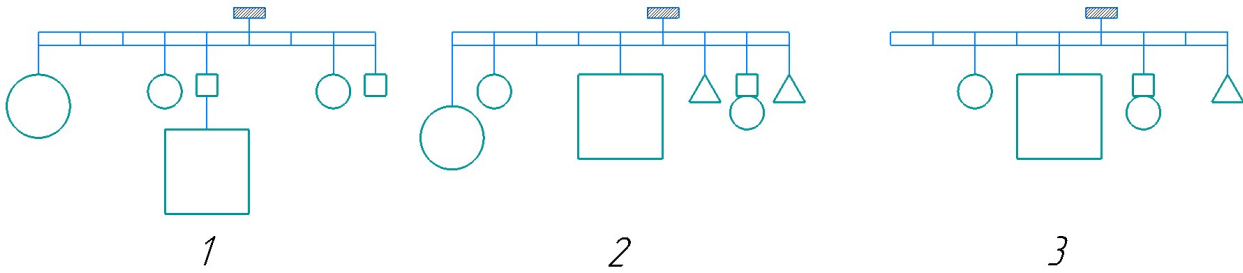
За верный ответ – 5 баллов.

Решение

Балка разделена засечками на равные части. Так как длина рычага не имеет значения, а важно только соотношение между длинами плечей, то при записи условия равновесия рычага будем измерять плечи в количестве частей.

Так как масса балки распределена равномерно по балке, то, чтобы её учесть, добавим массу в виде дополнительного груза в геометрический центр балки.

Добавим это на рисунки.



Обозначим массу куба за x , обозначим за y массу меньшего шара, обозначим за z массу большего шара и составим уравнения.

$$\begin{aligned} 1x + 2y + 200 + 5z &= 3x + 2y \\ 4y + 5z + 200 &= 50 + 2x + 2y + 3 \cdot 50 \\ 3y + 200 &= x + y + 3 \cdot 50 \end{aligned}$$

Упростим уравнения.

$$\begin{aligned} 2x - 5z &= 200 \\ 2x - 2y - 5z &= 0 \\ x - 2y &= 50 \end{aligned}$$

Решим данные уравнения в системе и получим, что:

$$x = 250, y = 100, z = 60.$$

Масса куба равна 250 г, масса шара меньшего размера равна 100 г, масса шара большего размера равна 60 г.

№ п/п	Критерий	Баллы
Пункт А		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (250 г)	5
2	Приведён только верный ответ (250 г)	3
3	В остальных случаях	0
Пункт Б		
1	Дан полностью верный ответ. Приведено верное обоснование решения (60 г)	5
2	Приведён только верный ответ (60 г)	3
3	В остальных случаях	0

Максимальный балл за работу – 50.