

II Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике 02 февраля 2025 г.

10 класс.

1. Турнир по олимпийской системе проходит в несколько туров: все игроки разбиваются на пары, проигравший в каждой паре выбывает из турнира, победители снова разбиваются на пары. Так происходит, пока не останется последняя пара игроков; победитель в этой паре объявляется победителем турнира, а проигравший занимает второе место. Провести олимпийский турнир можно, если число игроков является степенью числа 2.

Однажды 96 теннисистов случайным образом разбились на две группы – малую, в которой 32 игрока и большую, в которой 64 игрока. Известно, что среди этих 96 теннисистов нет двух, играющих одинаково хорошо, и в любой встрече побеждает тот, кто играет лучше.

В малой группе был проведён Малый олимпийский турнир по теннису из пяти туров. В большой группе был проведён Большой олимпийский турнир из шести туров.

Какова вероятность того, что встрече победитель Малого турнира проиграет игроку, занявшему второе место в Большом турнире?

2. В мешке n шариков с номерами от 1 до n . Из мешка достают 15 случайных шариков. При каком n будет наибольшей вероятность того, что среди выбранных шариков окажутся шарики с номерами 21, 190 и 2025?

3. В банде n разбойников, и любые двое либо знакомы друг с другом с вероятностью p независимо от прочих, либо не знакомы с вероятностью $q = 1 - p$. Назовём *компанией* четверых разбойников, если любые двое из этой четвёрки знакомы. Найдите математическое ожидание количества компаний в этой банде.

4. Велел отец сыну убрать камни с поля. Камней n , разбросаны они по полю случайно, а средний вес одного камня равен M кг. В первый день сын должен убирать камни до тех пор, пока под очередным случайным камнем не найдёт записку отца «Убери этот камень и хватит на сегодня, сынок». Остальные камни сын должен убрать на следующий день. Сравните математические ожидания двух величин: «*общий вес камней, убранных в первый день*» и «*общий вес камней, убранных во второй день*». Иными словами, какие камни и на сколько в среднем в сумме весят больше: те, которые сын уберёт в первый день, или те, которые он уберёт во второй?

5. На окружности случайно и независимо друг от друга выбраны три точки. Какова вероятность того, что у треугольника с вершинами в этих точках все углы меньше, чем 120° ?

6. Три мухи одновременно садятся на незамкнутую ломаную ABC – по одной мухе в каждую вершину. Каждую минуту после этого каждая муха перелетает в одну из соседних вершин, выбирая её случайным образом независимо от других мух и предыдущих перелётов. Одновременно в каждой вершине может быть больше одной мухи. Найдите математическое ожидание величины «*время, через которое все три мухи окажутся снова в тех же вершинах, где были вначале*».