

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников. Математика. 11 класс. Теоретический тур отборочного этапа, 2024/25

5 ноября 2024 г., 10:00 — 20 ноября 2024 г., 23:59

№ 1, вариант 1

10 баллов

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$k \cdot l \cdot m \cdot n \cdot p = 324000,$$

если известно, что k кратно 4, а m кратно 15.

Число

№ 1, вариант 2

10 баллов

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$k \cdot l \cdot m \cdot n \cdot p = 180000,$$

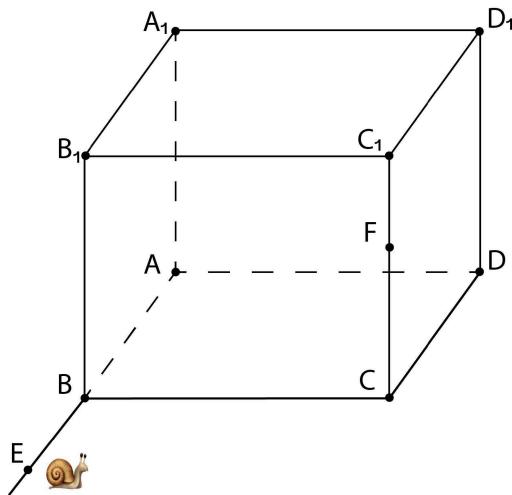
если известно, что k кратно 6, а m кратно 10.

Число

№ 2, вариант 1

10 баллов

На столе стоит деревянный кубик $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 3. Улитка ползёт из точки E , находящейся на прямой AB на расстоянии 2 от B (см. рисунок) в точку F на ребре CC_1 , причём $CF : FC_1 = 2 : 1$.



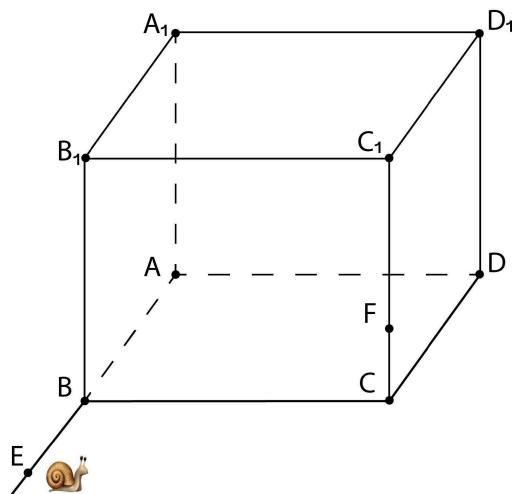
Найдите длину кратчайшего пути для улитки.

Число

№ 2, вариант 2

10 баллов

На столе стоит деревянный кубик $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 4. Улитка ползёт из точки E , находящейся на прямой AB на расстоянии 2 от B (см. рисунок) в точку F на ребре CC_1 , причём $CF : FC_1 = 1 : 3$.



Найдите длину кратчайшего пути для улитки.

Число

№ 3, вариант 1

15 баллов

Найдите максимальное значение $x + y$, если известно, что

$$\frac{2}{\pi}(\arcsin(1 - 2024x) + 2 \arccos(2025 - y)) = 5 + \sqrt{x}.$$

Число

№ 3, вариант 2

15 баллов

Найдите минимальное значение $x + y$, если известно, что

$$\frac{2}{\pi}(\arcsin(1 + 2025x) + 3 \arccos(y - 2024)) = 7 + 3x^2.$$

Число

№ 4, вариант 1

15 баллов

При каком наибольшем значении параметра a множество решений неравенства

$$\frac{(\sqrt{2-x} - \sqrt{x})(3^a \cdot x - 9)}{\cos(|x| + \frac{\pi}{4}) - \cos x} \leq 0$$

является точкой?

Число

№ 4, вариант 2

15 баллов

При каком наибольшем значении параметра a множество решений неравенства

$$\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{1-x})(2^a \cdot x - 8)}{\sin(|x| + \frac{\pi}{6}) - \sin x} \leq 0$$

является точкой?

Число

№ 5, вариант 1

25 баллов

Найдите целочисленные значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} \log_{(|x|+|x+1|)}(y^2 + x^2) \geq 1 \\ x(x+2) = (2-y)(2+y) \\ 3x + y + 2a = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответ запишите сумму этих целочисленных значений.

Число

№ 5, вариант 2

25 баллов

Найдите целочисленные значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} \log_{(|y+1|+|y|)}(y^2 + x^2) \leq 1 \\ y^2 + 2y = (2+x)(2-x) \\ x + 3y - 2a = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. В ответ запишите сумму этих целочисленных значений.

Число

№ 6, вариант 1

25 баллов

При каком наименьшем значении параметра a система имеет единственное решение?

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = a^2 + 3a + 4 \\ \cos\left(\frac{\pi x^2 - \pi}{x}\right) + a = 0 \end{cases}$$

Число

№ 6, вариант 2

25 баллов

При каком наименьшем значении параметра a система имеет единственное решение?

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} = a^2 + 5a + 2 \\ \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{x}\right) = 1 - a \end{cases}$$

Число