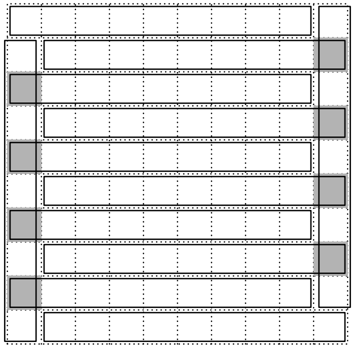
7 класс

Задача 1. Квадрат 10×10 клеток надо покрыть полосками 1×9 клеток. Сделайте это так, чтобы каждая клетка была покрыта одной или двумя полосками, но никакой прямоугольник 1×2 не был покрыт в два слоя. (Полоски кладут по линиям сетки горизонтально или вертикально, полоски не должны выходить за границу квадрата.)

[*4 балла*] (*М. Евдокимов*)

Ответ. См. рисунок (клетки, покрытые дважды, закрашены серым цветом).



Комментарий. Совсем просто покрыть горизонтальными полосками 1×9 прямоугольник 10×9. Если добавить две вертикальные полоски, то можно покрыть и квадрат 10×10. Чтобы никакой прямоугольник из двух клеток не был покрыт в два слоя, можно чередовать горизонтальные полоски, сдвинутые влево и сдвинутые вправо.

Начать с похожей, но более простой задачи вообще часто помогает.

Задача 2. Катя каждый день ест на завтрак либо кашу, либо яичницу, либо сырники, но никогда не ест два дня подряд одно и то же. В течение двух недель Катя записывала, чем она завтракала. Оказалось, что сырники она ела в два раза чаще, чем кашу. Сколько раз за эти две недели Катя завтракала яичницей? **[*5 баллов*]** (*И. Русских*)

Ответ. 5 раз.

Решение. Если Катя сколько-то раз ела кашу, то сырники она ела вдвое больше, а яичницу — в оставшиеся дни. Запишем возникающие варианты в виде таблицы:

каша	сырники	яичница
1	2	11
2	4	8
3	6	5
4	8	2
5 или больше	10 или больше	невозможно

Катя могла завтракать каждым видом еды не больше 7 раз (докажем это ниже). Значит, единственная возможность — она ела кашу 3 раза, сырники 6 раз, яичницу 5 раз.

Разобьём 14 дней на 7 пар соседних дней. По условию любой вид еды в каждой такой паре встречался не больше 1 раза. Значит, любой вид еды действительно встречался не больше 7 раз.

Комментарий. Такая ситуация действительно возможна — например, Катя могла завтракать в таком порядке: С-Я-К-С-Я-К-С-Я-К-С-Я-С-Я-С.

Задача 3. У математика есть набор из 16 гирь: 1/3 кг, 1/4 кг, 1/5 кг, ..., 1/18 кг. На левой чаше весов лежит груз 1 кг. Какие гири положить на правую чашу весов, чтобы уравновесить груз? (Достаточно привести один пример.)

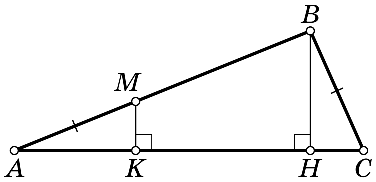
[*5 баллов*] (*М. Евдокимов*)

Ответ. Есть три варианта:

$$1 = 1/3 + 1/4 + 1/6 + 1/9 + 1/12 + 1/18,$$
$$1 = 1/3 + 1/4 + 1/6 + 1/10 + 1/12 + 1/15,$$
$$1 = 1/3 + 1/4 + 1/9 + 1/10 + 1/12 + 1/15 + 1/18.$$

Комментарий. Легко получить 1/2 как сумму 1/3 и 1/6. Осталось набрать ещё 1/2. Гири 1/3 и 1/6 мы использовать больше не можем, но можем «собрать» 1/3 как $1/4 + 1/12$, а 1/6 — как $1/9 + 1/18$ или $1/10 + 1/15$. Можно также не использовать гирю 1/6 вообще, взяв и $1/9 + 1/18$, и $1/10 + 1/15$.

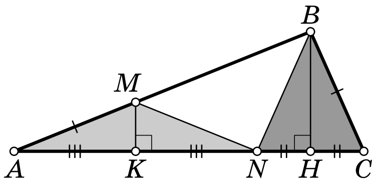
Задача 4. На стороне AB треугольника ABC отметили точку M так, что $AM = BC$. Из точек M и B на сторону AC опустили перпендикуляры MK и BH (см. рис.). AC вдвое больше KH. Угол A равен 22 градусам. Найдите угол C.



[*8 баллов*] (*М. Волчкевич*)

Ответ. 66°.

Решение. По условию $KH = AK + HC$. Значит, на отрезке KH можно выбрать такую точку N, что $AK = KN$, $NH = HC$.



Треугольники AMN и NBC равнобедренные, так как в каждом из них медиана совпадает с высотой. Получается, что и треугольник MNB равнобедренный: $MN = AM = BC = NB$. Значит, углы NMB и NBM при его основании равны.

Угол NMB равен $2 \cdot 22^\circ = 44^\circ$ как внешний угол равнобедренного треугольника AMN. А $\angle C = \angle BNC$, который равен $44^\circ + 22^\circ$ как внешний угол треугольника ABN.

Задача 5. В лесном пункте обмена можно обменять

- апельсин — на две груши,
- яблоко и грушу — на апельсин,
- апельсин и грушу — на яблоко.

По случаю праздника в пункте устроили акцию: за каждый обмен в подарок выдают коллекционный фантик. У лисы есть 30 яблок, 30 груш и 30 апельсинов. Какое максимальное количество фантиков она может получить?

[*8 баллов*] (*Г. Караваев, И. Русских*)

Ответ. 208 фантиков.

Решение. Попробуем приписать фруктам цену в фантиках так, чтобы обмены были равноценными. В двух обменах груша + фрукт меняется на фантик + фрукт, поэтому пусть груша стоит 1 фантик, а апельсин и яблоко попробуем считать равноценными. Поскольку апельсин меняется на две груши и фантик, припишем апельсину и яблоку цену по 3 фантика. С такими ценами при обменах стоимость вещей у лисы в фантиках не меняется. При последнем обмене лиса получит фруктов стоимостью хотя бы два фантика, так что больше чем $30 + 30 \cdot 3 + 30 \cdot 3 - 2 = 208$ фантиков ей никак не получить.

Осталось объяснить, как лисе получить 208 фантиков. Один из возможных алгоритмов состоит из двух стадий.

1 стадия (превращаем всё в апельсины). Лиса обменивает все яблоки и груши на апельсины и получает 30 фантиков. Теперь у лисы 60 апельсинов.

2 стадия (избавляемся от апельсинов). Последовательностью обменов 2А $\to$ А + 2Г $\to$ Я + Г $\to$ А можно уменьшить количество апельсинов на один, получив 3 фантика. Лиса делает так 59 раз, и у неё останется один апельсин (и еще $59 \cdot 3 = 177$ фантиков). Осталось обменять этот последний апельсин на две груши и получить ещё фантик.

В итоге лиса получает $30 + 177 + 1 = 208$ фантиков, как и было обещано.

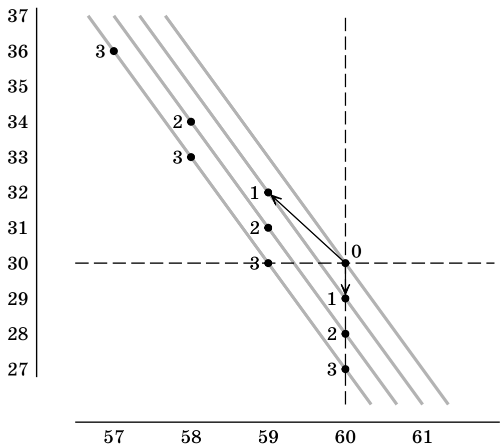
Комментарии. 1. Доказать, что больше 208 фантиков получить нельзя, можно и по-другому. Заметим, что каждый обмен не увеличивает количество не-груш, а обмен А $\to$ 2Г уменьшает его на 1. Поэтому обменов А $\to$ 2Г может быть не больше 60. При всех остальных обменах количество груш уменьшается на 1.

Если в конце ничего, кроме груш, не осталось, то последним ходом лиса обменяла апельсин на две груши. В этом случае в конце остаётся не меньше двух груш, следовательно, число обменов А + Г $\to$ Я и Я + Г $\to$ А не превышает $30 + 60 \cdot 2 - 2$.

Если же в конце остается какой-то фрукт, отличный от груши, то обменов А $\to$ 2Г не больше 59, а остальных не больше $30 + 2 \cdot 59$.

В обоих случаях суммарное количество обменов не превосходит 208.

2. Нарисуем график: если у лисы в какой-то момент x негруш и y груш, отметим на координатной плоскости точку (x, y). Можно заметить, что если провести через каждую точку с целыми координатами прямую «с наклоном $(1, -3)$» (прямые с уравнениями $y = -3x + c$), то с каждым обменом лиса переходит с прямой на прямую на 1 ниже (на рисунке показаны точки, в которые можно попасть, сделав не более 3 обменов). Подумайте, как это связано с рассуждением в начале решения.



Задача 6. У Васи есть трафареты и цветные карандаши. Вася каждым ходом может приложить трафарет к бумаге и закрасить выбранным цветом всю видимую через трафарет область.

Например, используя трафарет с двумя отверстиями, как на рисунке 1 слева, Вася может раскрасить фигурку справа за 3 хода в 3 цвета.

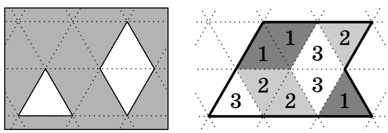


Рис. 1

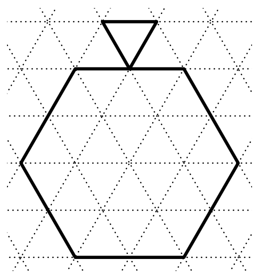
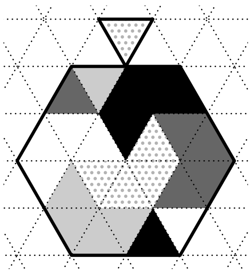


Рис. 2

Придумайте для Васи такой трафарет с двумя отверстиями, пользуясь которым он сможет за 5 ходов раскрасить фигуру в форме яблока (см. рис. 2) в 5 цветов так, чтобы каждая треугольная клетка была покрашена ровно одним цветом. Трафарет можно поворачивать и переворачивать.

[*8 баллов*] (*И. Русских*)

Ответ. См. рисунок. Решение единственно с точностью до симметрии.



Комментарий. В задаче предлагалось разрезать «яблоко» на 5 равных несвязных фигур (подчеркнём, что фигуры должны быть не просто одинаковой площади, а действительно равные — нарисованные при помощи одного и того же трафарета).

На рисунке ниже найденное несколько лет назад М. Патракеевым разрезание равностороннего треугольника на 5 равных частей. Намного легче разрезать равносторонний треугольник на 2, 3, 4, 6, 8 или 9 равных частей (тут можно обойтись и без несвязных частей, а резать просто на равные треугольники — попробуйте!). Можно ли разрезать равносторонний треугольник на 7 или, скажем, на 11 равных частей — никто не знает!