## *6 класс*

**Задача 1.** В записи $12345678 = 1$ вставьте знаки умножения и деления между некоторыми цифрами так, чтобы равенство стало верным. [*4 балла*] (*А. Шаповалов*)

**Ответ.** $12:3:4\cdot 56:7:8=1$.

**Задача 2.** Собрались на состязанье йог, бульдог и носорог. Один из них ловчее всех и всегда лжёт, другой — смелее всех и всегда говорит правду, третий — быстрее всех, может говорить и ложь, и правду. Они сделали три заявления.

Йог: Самый быстрый смелее меня.

Бульдог: Я быстрее самого ловкого.

Носорог: Я ловчее самого смелого.

Кто из них самый медленный? [*6 баллов*] (*А. Шаповалов*)

**Ответ.** Йог.

**Решение.** Может ли носорог быть самым смелым? Нет, так как в таком случае он бы говорил правду и действительно был бы ловчее самого смелого, но нельзя быть ловчее самого себя.

Может ли носорог быть самым ловким? Нет, так как в таком случае он ловчее самого смелого и говорит правду, хотя должен лгать. Значит, носорог – самый быстрый.

Йог тоже не может быть самым смелым. Ведь в таком случае он бы сказал правду, но самый быстрый не может быть ещё смелее его.

Значит, йог — самый ловкий. Тогда бульдог — самый смелый. Из слов бульдога ясно, что он быстрее йога. А так как носорог — самый быстрый, то йог — самый медленный.

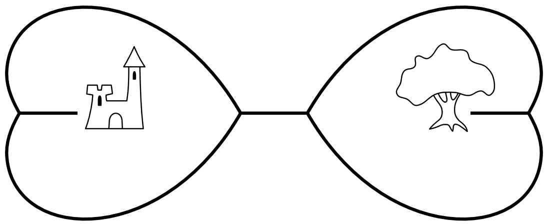
*Комментарий.* В этой задаче в условии явно указано, что по каждому показателю (ловкости, быстроте и смелости) кто-то один занимает первое место. В решении показано, что для быстроты можно также определить, что бульдог по ней на втором месте, а йог на третьем. А для ловкости и смелости определить, кто на втором месте, а кто на третьем, нельзя.

По смелости на первом месте бульдог. Так как йог лжёт, носорог не смелее его. Но и не обязательно трусливее, их смелость может быть и одинаковой. Итак, возможны два случая: либо на первом месте бульдог, на втором йог, на третьем носорог, либо на первом бульдог, а носорог и йог делят 2–3 места.

Про ловкость можно понять только то, что на первом месте йог. Правду ли говорит носорог, узнать нельзя. Поэтому нет никаких данных для сравнения носорога и бульдога по ловкости.

**Задача 3.** В Тридевятом царстве на каждом перекрёстке сходится ровно три дорожки. Было у царя три сына, старшие умные, а младший Иван-дурак. Послал старик сыновей за молодильными яблоками. Старший, выйдя из дворца, на первом перекрёстке свернул налево, на следующем направо, потом налево, снова направо — и дошёл до волшебной яблони. Средний на первом перекрёстке свернул направо, потом налево, снова направо, снова налево — и тоже дошёл до этой яблони. А Иван на всех перекрёстках поворачивал направо, три раза повернул да и пришёл обратно во дворец несолоно хлебавши. Нарисуйте пример, как может выглядеть схема дорожек в Тридевятом царстве, если известно, что и от царского дворца, и от яблони отходит ровно по одной дорожке. **[*6 баллов*]** (*И. Русских*)

**Ответ.** Пример схемы дорожек приведён на рисунке.



**Задача 4.** Из 54 красных и 54 белых брусков $1 \times 1 \times 2$ сложили куб $6 \times 6 \times 6$.

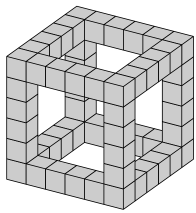
Какое наибольшее количество красных клеточек могло оказаться на поверхности куба? **[*7 баллов*]**
(*М. Евдокимов*)

**Ответ.** 172.

**Решение.** Распилим мысленно каждый брусок на два кубика и будем выкладывать куб из них. У нас получилось

108 красных и 108 белых кубиков. У каждого кубика на поверхности большого куба может оказаться от нуля до трёх граней-клеточек. Три грани на поверхности будут у восьми угловых кубиков. Две грани — у кубиков, расположенных вдоль рёбер большого куба, но не на углу. Вдоль каждого из 12 ребер таких кубиков 4, а всего их 48. Больше всего красных клеточек окажется на поверхности, если красными будут эти $8 + 48 = 56$ кубиков, а также $108 - 56 = 52$ кубика с одной гранью на поверхности. Тогда на поверхности окажется $3 \cdot 8 + 2 \cdot 48 + 52 = 172$ красных клеточки.

Приведём теперь пример выкладывания брусков, приводящего к такому результату.



Из 28 красных брусков сложим каркас (см. рисунок), а из 32 белых брусков — внутренний куб $4 \times 4 \times 4$. Оставшиеся шесть квадратных «окон» $4 \times 4$ на каждой грани заполним произвольно. Тогда на поверхности куба будет 120 красных клеток каркаса (по 20 на каждой грани) и ещё 52 красных клетки (по две у каждого из оставшихся $54 - 28 = 26$ красных брусков). Итого $120 + 52 = 172$ клетки.

**Задача 5.** Карлсон ест варенье вдвое быстрее, чем Малыш, а торт он ест втрое быстрее, чем Малыш.

Однажды они съели банку варенья и торт. Карлсон начал с торта, а Малыш с варенья. Покончив с тортом, Карлсон помог Малышу доесть варенье, и на всё это у них ушло два часа.

В другой раз они съели такую же банку варенья и такой же торт, но Малыш ел торт, а Карлсон начал с варенья. Съев его, Карлсон помог Малышу доесть торт. За какое время они управились на этот раз? [***8 баллов***] (*А. Шаповалов*)

**Ответ.** За 2 часа 15 минут.

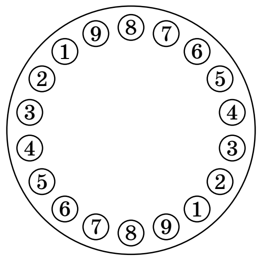
**Решение.** Представим себе, что был ещё и третий день, когда Карлсон всё съел в одиночку. Поэтому времени у него ушло больше, чем в первый день. Во сколько раз? Малыш в первый день ел только варенье, то есть работал как $\frac{1}{2}$ Карлсона, а Малыш и Карлсон вместе — как $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ Карлсона. Значит, в третий день Карлсон потратил бы в $\frac{3}{2}$ раза больше времени, чем в первый, а именно $\frac{3}{2}\cdot 2=3$ часа.

Сравним теперь третий день со вторым. Малыш во второй день ел только торт, то есть работал как $\frac{1}{3}$ Карлсона, а Малыш и Карлсон вместе — как $1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ Карлсона. Значит, в третий день Карлсон потратил бы в $\frac{4}{3}$ раза больше времени, чем во второй. Так как в третий день было бы потрачено 3 часа, то во второй $3:\frac{4}{3}=\frac{9}{4}$ часа, или 2 ч 15 мин.

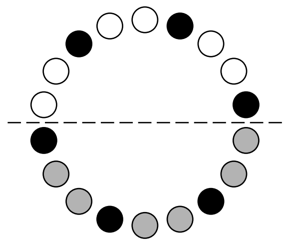
Приведём и алгебраическое решение. Пусть Карлсон съедает торт за $x$ часов, а варенье за $y$ часов. В первый день, пока Карлсон ел торт, Малыш съел $\frac{x}{2y}$ банки. Остаток банки, то есть $1-\frac{x}{2y}=\frac{2y-x}{2y}$, они ели с суммарной скоростью $\frac{1}{2y}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2y}$, потратив на это $\frac{2y-x}{2y}:\frac{3}{2y}=\frac{2y-x}{3}$ часов. Таким образом, всего они ели $x+\frac{2y-x}{3}=\frac{2(x+y)}{3}$ часов, что по условию составляет 2 часа. Отсюда $x+y=3$.

Аналогично, во второй день Карлсон через $y$ часов присоединился к Малышу доедать оставшиеся $1-\frac{y}{3x}=$ $=\frac{3x-y}{3x}$ торта. Со скоростью $\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}=\frac{4}{3x}$ они сделали это за $\frac{3x-y}{3x}:\frac{4}{3x}=\frac{3x-y}{4}$ часов. Всего у них ушло $y+\frac{3x-y}{4}=$ $=\frac{3(x+y)}{4}=\frac{9}{4}$ часа, то есть 2 часа 15 минут.

**Задача 6.** У Пети было 18 одинаковых по внешнему виду монет — две по 1 г, две по 2 г, две по 3 г, ..., две по 9 г. Он разложил их на подносе по кругу, как показано на рисунке. Потом поднос как-то повернули, и теперь непонятно, где какая монета. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь это определить? **[*8 баллов*]** (*Т. Казицына*)



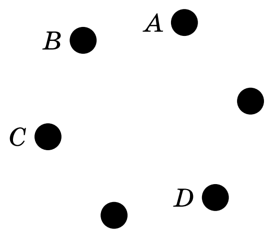
**Решение.** Проведём линию через центр круга (см. рис.).



Монеты ниже линии все разные, сумма их масс 45. Чёрные монеты ниже линии — либо 1, 4 и 7 (первый случай), либо 2, 5, 8 (второй случай), либо 3, 6, 9 (третий случай). Чёрные монеты выше линии — такие же, как и ниже. Положим серые монеты на одну чашу весов, чёрные на другую, и сравним их массы:

| Случаи | Сумма чёрных | Сумма серых | Весы покажут |
|---|---|---|---|
| Первый | $2\cdot(1+4+7)=24$ | $45-1-4-7=33$ | Перевес серых |
| Второй | $2\cdot(2+5+8)=30$ | $45-2-5-8=30$ | Равновесие |
| Третий | $2\cdot(3+6+9)=36$ | $45-3-6-9=27$ | Перевес чёрных |

Итак, теперь мы знаем веса чёрных монет (но не умеем пока их различать). Более того, мы точно знаем, где лежат монеты в 3, 6 и 9 г — либо это чёрные монеты, либо их соседи справа, либо их соседи слева — зависит от того, какой случай получился в первом взвешивании. Посмотрим на эти шесть монет (пусть они, например, чёрные).




Сравним $A+C$ и $B+D$. Возможны три случая:

| Случаи | $A+C$ | $B+D$ | Весы покажут |
|---|---|---|---|
| $A=3$ | $3+9$ | $6+6$ | Равновесие |
| $A=6$ | $6+3$ | $9+9$ | $A+C<B+D$ |
| $A=9$ | $9+6$ | $3+3$ | $A+C>B+D$ |

Теперь мы знаем вес монеты $A$, а тогда и всех остальных тоже.