ММО-2025, 11 класс, второй день

Задача 1. Между двумя восьмёрками в числе 88 вписали несколько нулей. Докажите, что можно всегда дописать слева в начало нового числа ещё несколько цифр так, чтобы получилось число, которое является полным кубом. (*М. Евдокимов*)

Решение. Рассмотрим выражение $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. Заметим, что если натуральное число x оканчивается на $40\ldots0$ (всего $n+1$ нуль, где n — натуральное), то это выражение примет значение, оканчивающееся на $80\ldots08$ (n нулей между восьмёрками):

$$(4 \cdot 10^{n+1} + 2)^3 = 64 \cdot 10^{3n+3} + 96 \cdot 10^{2n+2} + 48 \cdot 10^{n+1} + 8.$$

Поэтому можно дописать несколько цифр в начало нового числа так, чтобы получилось число $40\ldots02^3$.

Замечание. Подходит также число $90\ldots02^3$.

Задача 2. Кусок сыра массой 1 кг разрезали на $n \geqslant 4$ кусков массами меньше 600 г. Оказалось, что их нельзя разбить на две кучки так, чтобы масса каждой кучки была не меньше 400 г, но не больше 600 г (кучка может состоять из одного или нескольких кусков). Докажите, что найдутся три таких куска, что суммарная масса любых двух из них больше 600 г. (*Д. Горяшин*)

Решение. Первый способ. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — массы кусков в граммах. Упорядочим их по величине: $600 > x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n$. Тогда $x_1 < 400$, иначе кучка из одного куска массой x_1 и кучка из всех остальных кусков противоречат условию.

Теперь достаточно показать, что $x_2 + x_3 > 600$. Предположим противное: пусть $x_2 + x_3 \leqslant 600$, тогда $x_2 + x_3 < 400$ (иначе снова есть две кучки, противоречащие условию: кучка из кусков массами x_2, x_3 и кучка из всех остальных кусков). Поэтому $200 > x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n$. Будем теперь класть на весы по одному куски массами $x_2, x_3, \ldots, x_n$ именно в этом порядке. Начальная масса кучки на весах будет равна $x_2 < 400$, а конечная — $x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1000 - x_1 > 600$, так как $x_1 < 400$. Поскольку масса каждого очередного куска меньше 200 г, в некоторый момент на весах окажется кучка, масса которой будет не меньше 400 г, но не больше 600 г, что противоречит условию.

Второй способ. Из условия следует, что масса каждого куска меньше 400 г. При любом разбиении кусков на две кучки масса одной из них будет меньше 400 г, а масса другой — больше 600 г. В первом случае назовём кучку *лёгкой*, а во втором — *тяжёлой*. Лёгкой кучке соответствует тяжёлая (из остальных кусков), и наоборот. Также назовём произвольный кусок *большим*, если при добавлении его к некоторой лёгкой кучке она становится тяжёлой, а в противном случае назовём кусок *маленьким* (при добавлении его к любой лёгкой кучке она остаётся лёгкой). Масса любого большого куска больше 200 г.

Рассмотрим кучку, состоящую из всех маленьких кусков. Она лёгкая, поэтому ей соответствует тяжёлая кучка из остальных кусков. В этой тяжёлой кучке не менее двух кусков, причём они все большие. Выберем один из этих кусков и переложим к кучке из маленьких кусков. Полученная кучка также лёгкая, так как её можно получить, добавляя последовательно к этому большому куску все маленькие куски. Ей снова соответствует тяжёлая кучка, также состоящая из не менее двух кусков.

Таким образом, найдены три больших куска, любые два из которых образуют тяжёлую кучку, т. е. имеют суммарную массу больше 600 г.

Замечание. Такая тройка больших кусков единственна. Действительно, если бы было хотя бы 4 больших куска, то составленная из них тяжёлая кучка имела бы массу более $2 \cdot 600 = 1200$ г.

Кроме того, при сужении промежутка $[400; 600]$ г, в который не должны попадать массы кучек при произвольном разбиении, утверждение задачи перестаёт быть верным, что показывает пример разрезания на 4 куска массами 200, 200, 200 и 400 г.

Задача 3. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На стороне BC отметили точку D. Окружности, описанные около треугольников BOD и COD, повторно пересекают отрезки AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что из отрезков BX, XY и YC можно сложить треугольник. (*А. Соколов*)

Решение. Поскольку четырёхугольники $BXOD$, $CYOD$ вписанные, то $\angle XOD+\angle CBA = \angle YOD + \angle ACB = 180^\circ$. Так как

$$\angle XOD + \angle YOD = 360^\circ - \angle ACB - \angle CBA > 360^\circ - \angle ACB - \angle CBA - \angle BAC = 180^\circ,$$

точки O и A лежат по разные стороны от прямой XY. В частности, мы показали, что точка O лежит строго внутри треугольника XYD.

Тогда

$$\begin{aligned}\angle XOY + \angle BAC &= 360^\circ - \angle XOD - \angle YOD + \angle BAC = \\ &= (180^\circ - \angle XOD) + (180^\circ - \angle YOD) + \angle BAC = \\ &= \angle CBA + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ,\end{aligned}$$

поэтому четырёхугольник $AXOY$ также является вписанным.

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Пусть точка Z, отличная от C, на отрезке BC такова, что $YC = YZ$ (рис. 1). Тогда поскольку треугольник YZC равнобедренный, $\angle YZC = \angle ACB$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\angle YXD &= \angle YXO + \angle DXO = \angle YAO + \angle DBO = \\ &= (90^\circ - \angle ABC) + (90^\circ - \angle BAC) = \angle BCA.\end{aligned}$$

Значит, $\angle YZC = \angle YXD$, откуда следует (вне зависимости от порядка расположения точек D и Z на отрезке BC), что точки X, Y, Z и D лежат на одной окружности. Следовательно,

$$\begin{aligned}\angle XZD &= \angle XYD = \angle XYO + \angle DYO = \angle XAO + \angle DCO = \\ &= (90^\circ - \angle BCA) + (90^\circ - \angle BAC) = \angle ABC.\end{aligned}$$

Поэтому треугольник XZB равнобедренный и $XZ = XB$. Получаем, что треугольник XYZ составлен из отрезков XY, XZ и YZ, равных XY, BX и CY соответственно, что и требовалось.

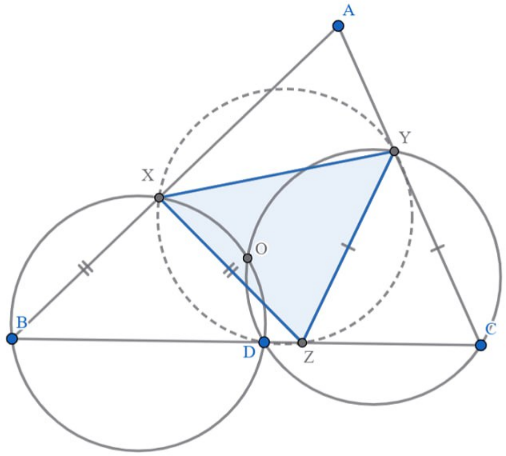

Рис. 1

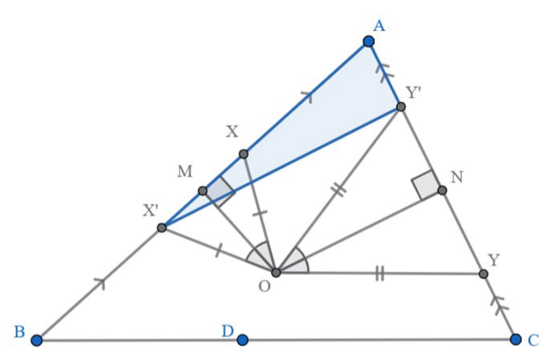

Рис. 2

Второй способ. Пусть точки X', Y' симметричны точкам X и Y относительно середин M и N сторон AB и AC соответственно (рис. 2). Поскольку O — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, $\angle OMA = \angle ONA = 90^\circ$. Тогда из четырёхугольников $MONA$,

$XONA$ находим $\angle MON = \angle XOY = 180^\circ - \angle BAC$. Не ограничивая общности, предположим, что X лежит на отрезке AM. Поскольку $\angle MON = \angle XOY$, точка Y лежит на отрезке NC. Получаем, что

$$\angle XOX' = 2\angle XOM = 2(\angle MON - \angle XON) = \\ = 2(\angle XOY - \angle XON) = 2\angle YON = \angle YOY'.$$

Следовательно, треугольники $X'OY'$ и XOY равны по двум сторонам и углу между ними (на самом деле, мы показали, что они совмещаются поворотом с центром в точке O на угол $\angle YOY' = \angle XOX'$). Тогда $X'Y' = XY$. Поскольку $AX' = BX$, $AY' = CY$ из симметрии, получаем, что треугольник $AX'Y'$ составлен из отрезков, равных XY, BX и CY, что и требовалось.

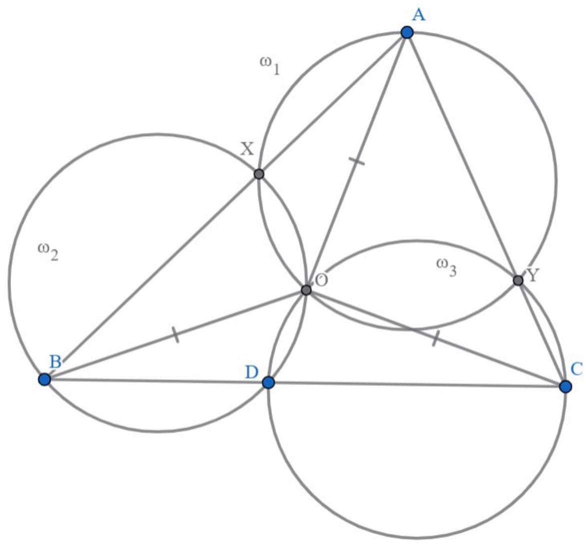

Рис. 3

Третий способ. По теореме синусов радиус окружности, описанной около $AXOY$, равен $\frac{AO}{2\sin\angle AXO}$, а радиус окружности, описанной около $BXOD$, равен $\frac{BO}{2\sin\angle BXO}$. Поскольку $BO = AO$, $\angle BXO + \angle AXO = 180^\circ$, получаем, что радиусы этих двух окружностей равны. Проводя аналогичное рассуждение для четырёхугольников $AXOY$ и $CYDO$, получаем, что радиусы окружностей, описанных около всех трёх четырёхугольников $AXOY$, $BXOD$ и $CYOD$ равны. Обозначим эти окружности ω_1, ω_2, ω_3 соответственно (рис. 3). Для того чтобы показать, что из отрезков BX, XY, YC можно сложить треугольник, достаточно проверить, что вписанные углы, опирающиеся на эти отрезки в окружностях ω_2, ω_1, ω_3 соответственно, в сумме дают 180°.

Убедимся в этом. Заметим, что

$$\angle BOX + \angle COY = \angle BDX + \angle CDY = \\ = 180^\circ - \angle ODX - \angle ODY = 180^\circ - \angle OBA - \angle OCA = \\ = 180^\circ - (90^\circ - \angle ACB) - (90^\circ - \angle CBA) = \angle ACB + \angle CBA.$$

Таким образом,

$$\angle XAY + \angle BOX + \angle COY = \angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = 180^\circ,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Отметим, что во всех трёх способах решения неявно предполагается, что точки X и Y отличны от A. Тем не менее все три рассуждения можно уточнить и в противном случае. Например, если точка X совпадёт с точкой A, то утверждение о вписанности четырёхугольника $AXOY$ из решения нужно заменить на утверждение о касании описанной окружности треугольника AOY стороны AB в точке A.

Задача 4. Назовём подмножество A плоскости *похожим на прямую*, если для некоторой прямой ℓ той же плоскости найдётся такое взаимно однозначное соответствие $f\colon \ell \to A$, что для всяких двух точек X, Y на прямой ℓ длина отрезка XY отличается от длины отрезка $f(X)f(Y)$ не более, чем на 1. Верно ли, что любое подмножество плоскости, похожее на прямую, лежит между некоторыми двумя параллельными прямыми? (*И. Михайлов*)

Ответ: нет, неверно.

Решение. Приведём контрпример. Возьмём в качестве ℓ ось абсцисс, а в качестве множества A — график функции $g(x) = \sqrt{|x|}$. Докажем, что отображение $x \to (x,\, g(x))$ удовлетворяет условию.

Достаточно проверить, что для произвольных $y > x$ выполнены неравенства

$$\sqrt{(y-x)^2 + \left(\sqrt{|y|} - \sqrt{|x|}\right)^2} \leqslant (y-x) + 1, \tag{1}$$

$$y - x \leqslant \sqrt{(y-x)^2 + \left(\sqrt{|y|} - \sqrt{|x|}\right)^2} + 1. \tag{2}$$

Неравенство (2) верно, поскольку $(y-x) < \sqrt{(y-x)^2 + \left(\sqrt{|y|} - \sqrt{|x|}\right)^2}$.

Обоснуем неравенство (1). Возводя его в квадрат и сокращая слагаемое $(y-x)^2$, получаем, что достаточно доказать неравенство

$$\left(\sqrt{|y|} - \sqrt{|x|}\right)^2 \leqslant 2(y-x) + 1.$$

1) Если $y > x \geqslant 0$, то

$$\left(\sqrt{|y|} - \sqrt{|x|}\right)^2 \leqslant 2\left(\sqrt{|y|} - \sqrt{|x|}\right)\left(\sqrt{|y|} + \sqrt{|x|}\right) = 2(y-x) < 2(y-x) + 1.$$

2) Если $y \geqslant 0 > x$, то

$$\left(\sqrt{|y|} - \sqrt{|x|}\right)^2 = \left(\sqrt{y} - \sqrt{-x}\right)^2 = y - x - 2\sqrt{y}\sqrt{-x} \leqslant y - x < 2(y-x) + 1.$$

3) Если $0 \geqslant y > x$, то заметим, что при замене y на $-y$ и x на $-x$ левая и правая части доказываемого неравенства не меняются, и справедливо рассуждение пункта 1.

Таким образом, неравенства (1) и (2) верны для произвольных $y > x$.

Остаётся показать, что график функции $g(x)$ не лежит между никакими двумя параллельными прямыми. Предположим противное: график функции $g(x)$ лежит между параллельными прямыми ℓ_1 и ℓ_2. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 не могут быть вертикальными или горизонтальными, поскольку на графике $g(x)$ есть точки со сколь угодно большими абсциссами и ординатами. Предположим теперь, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 задаются уравнениями $y = kx + b_1$, $y = kx + b_2$, причём $b_1 < b_2$. Рассмотрим точку с координатами $\left(-\frac{b_2+1}{k}, \sqrt{\frac{b_2+1}{k}}\right)$. Эта точка лежит на графике $g(x)$ и имеет неотрицательную ординату. С другой стороны,

$$k \cdot \left(-\frac{b_2+1}{k}\right) + b_1 < k \cdot \left(-\frac{b_2+1}{k}\right) + b_2 = -1 < 0,$$

поэтому данная точка не лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2. Противоречие.

Задача 5. Фокусник вместе со своим помощником собираются показать следующий фокус. Помощник надевает фокуснику повязку на глаза, приглашает на сцену случайного зрителя из зала и просит его написать последовательность из нулей и единиц длины 2^{2025}. Затем помощник верно называет фокуснику номер и значение некоторого одного члена последовательности. Задача фокусника — отгадать 2025 других членов последовательности (т. е. назвать их номера и значения). Докажите, что они могут заранее договориться так, чтобы фокус удался. (*М. Гасанов*)

Решение. Пусть A — множество всех последовательностей из нулей и единиц длины 2^{2025}. Определим функцию $f(a)$, сопоставляющую каждой последовательности a из A последовательность, состоящую из её последних 2025 цифр. Пусть B — множество всех последовательностей из нулей и единиц длины 2025, в которых ровно один элемент равен 1, а остальные равны 0, а C — множество всех остальных последовательностей длины 2025. Тогда $|B| = 2025$, $|C| = 2^{2025} - 2025$. Введём функцию «нумерации» для последовательностей из C, т. е. функцию $g : C \to \{1, 2, 3, \ldots, 2^{2025} - 2025\}$, взаимно однозначно сопоставляющую каждой последовательности из C какой-то номер от 1 до $2^{2025} - 2025$. Обе функции f и g известны как фокуснику, так и его помощнику.

Теперь опишем действия каждого из них. Пусть помощник увидел перед собой последовательность x. Тогда у него есть несколько вариантов.

1) Если $f(x) \in C$, то он сообщает значение элемента под номером $g(f(x))$.

2) Если $f(x) \in B$ и первая цифра последовательности x равна 1, то помощник сообщает значение и номер единицы из последовательности $f(x)$.

3) Если $f(x) \in B$ и первая цифра последовательности x равна 0, то помощник сообщает значение и номер того нуля, который следует за единственной единицей в последовательности $f(x)$ (такая единица единственна, так как эта последовательность принадлежит множеству B). Если же единица стоит на последнем месте, то помощник сообщает значение и номер первого нуля.

Опишем действия фокусника.

1) Если он услышал цифру с номером из диапазона от 1 до $2^{2025} - 2025$, то он понимает, что это случай 1). Значит, по этому номеру с помощью функции нумерации (ввиду её биективности) он может восстановить $f(x)$, а значит, и последние 2025 цифр вместе с их номерами.

2) Если он услышал цифру с номером из последних 2025 номеров, то он понимает, что это случай 2) или 3). Но в обоих случаях у нас у последовательности x последние 2025 цифр все нули, кроме одного. Из последних 2025 цифр он может отгадать 2024 других цифры, так как одну уже назвал помощник. Также он может назвать самую первую цифру последовательности, так как она в случаях 2) и 3) совпадает с той цифрой, что называет помощник. Значит, и в этом случае фокусник отгадает 2025 цифр.

Замечание. Утверждение задачи остаётся верным при замене 2025 на произвольное натуральное n. Также можно показать, что фокусник и помощник не смогут договориться так, чтобы отгадать 2026 других членов последовательности.