LXXIX Московская астрономическая олимпиада (2025 г.)

Теоретический тур. Решения и критерии оценивания

8 класс

Задача 1

На самом юге Африки в Южно-Африканской Республике находится гора Столовая (34° ю. ш., 18° в. д.). В честь этой горы астроном Никола Луи де Лакайль назвал созвездие Столовая Гора. Один современный астроном-любитель решил посмотреть на созвездие Столовая Гора со Столовой горы. Когда вечером он поднялся на гору, то увидел, что созвездие находится точно над точкой юга вблизи горизонта. В какую сторону сместится созвездие через пару часов? Сможет ли астроном увидеть это созвездие через полгода, если снова поднимется вечером на Столовую гору в то же время? Можно ли в какой-нибудь сезон года увидеть Столовую Гору со Столовой горы в зените?

Решение. В Южном полушарии, как и в Северном, можно видеть движение звёзд вокруг полюса мира, только Южного, который располагается над точкой юга. Поскольку наблюдатель находится в точке с широтой 34° ю. ш., то высота полюса мира над горизонтом будет также равна 34°. Раз созвездие наблюдается вблизи горизонта, значит, оно находится ниже полюса мира.

Видимое движение звезд вокруг Южного полюса мира для астронома-любителя происходит по часовой стрелке, поэтому для наблюдателя созвездие сместится влево и вверх, или ещё можно сказать, к востоку.

Поскольку астроном видит созвездие под Южным полюсом мира, то ещё ниже оно не опустится. Значит это созвездие в месте наблюдения незаходящее и его можно увидеть в любую ясную ночь в году, в том числе и через полгода.

Поскольку Столовая Гора не опускается ниже 34° ниже полюса мира, то и не поднимается выше его на такую же величину. Значит, максимальная высота созвездия не превышает $2 \times 34^\circ = 68^\circ$, то есть в зените со Столовой горы оно не наблюдается никогда.

Критерии проверки

Выводы без обоснований не оцениваются.

1. Астроном видит нижнюю кульминацию созвездия	**1 балл**
2. Правильное направление движения звёзд вокруг Южного полюса мира	**1 балла**
3. Правильное направление смещения созвездия	**1 балл**
4. Созвездие незаходящее	**1 балл**
5. Через полгода созвездие можно увидеть	**1 балл**
6. Созвездие не бывает в зените	**3 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(М. В. Силантьев)

Задача 2

Инопланетяне решили построить гигантский космический корабль-пылесос, чтобы прибраться в Галактике. Пылесос имеет форму цилиндра, летящего торцевой стороной вперёд. Длина пылесоса равна 300 м, а площадь основания — 8000 м^2. Пылесос движется сквозь газо-пылевое облако со скоростью 0.01 скорости света и собирает только пылинки. Определите:

1. массу вещества, которую он соберёт, один раз пройдя облако по диаметру,
2. время, за которое пылесос полностью заполнится,
3. долю массы, которую составит пыль в этом облаке после уборки.

Масса облака — $5 \cdot 10^4$ масс Солнца, а диаметр 3 пк. Масса пыли составляет 1% массы облака. Диаметр пылинки — 1 мкм, плотность — 1 г/см^3. Считать распределение вещества в облаке равномерным.

Решение. Проходя облако по диаметру корабль-пылесос соберёт пыль из цилиндра с площадью основания $s = 8000$ м^2 и высотой $D = 3$ пк $\approx 9.3 \cdot 10^{16}$ м. Объём всего облака равен

$$V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} D^3 \approx 4.15 \cdot 10^{50} \text{ м}^3.$$

Эта величина больше объема, обработанного кораблём, в $\frac{V}{sD} \approx 5.6 \cdot 10^{29}$ раза. Значит, в пылесос попала масса пыли, равная

$$m = \frac{0.01M}{\frac{V}{sD}} \approx \frac{0.01 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{5.6 \cdot 10^{29}} \approx 1800 \text{ кг}.$$

Объём корабля равен $V_\text{к} = sl = 8000 \cdot 300 = 2.4 \cdot 10^6$ м^3, а значит, он может вместить $M = V_\text{к} \cdot \rho_\text{п} = 2.4 \cdot 10^6$ м$^3 \cdot 1000$ кг/м$^3 = 2.4 \cdot 10^9$ кг. Скорость света равна $c = 300\,000$ км/с. Двигаясь со скоростью $0.01c$ корабль преодолевает 3000 км за секунду, а парсек пролетает за $3.1 \cdot 10^{13}/3000 \approx 1 \cdot 10^{10}$ с ≈ 327 лет. Проходя один парсек, он собирает $m/3 = 600$ кг пыли. Значит, полностью он заполнится за

$$t = \frac{2.4 \cdot 10^9}{600} \cdot 327 \approx 1.3 \cdot 10^9 \text{ лет}.$$

Полная масса пыли в облаке $0.01 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{30}$ кг $= 10^{33}$ кг. Пылесос собрал ничтожную по сравнению с этой массу. Можно сделать вывод, что масса пыли как была, так и осталась 1% от массы газа, а уборка закончилась полным провалом.

Критерии проверки

1. Масса собранная после прохода по диаметру	**3 балла**
2. Время заполнения пылесоса	**3 балла**
3. Изменение массовой доли пыли ничтожно	**2 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

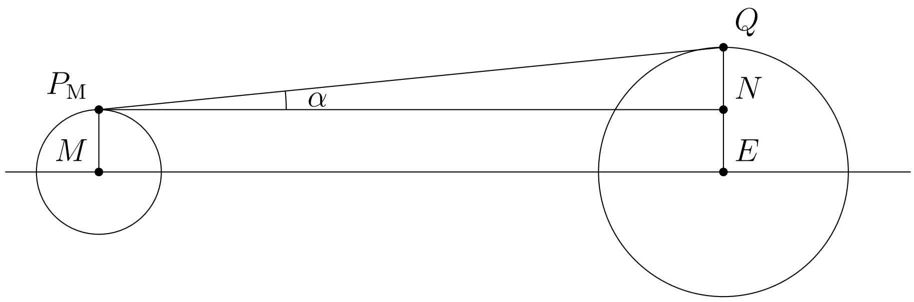
(В. Б. Игнатьев, Е. Н. Фадеев)

Задача 3

Жак Кассини обнаружил в 1721 году, что плоскость лунного экватора составляет с плоскостью лунной орбиты угол 6°39′, а с плоскостью эклиптики — 1°30′, причём плоскость эклиптики лежит между плоскостями лунного экватора и орбиты Луны и все три плоскости пересекаются по одной прямой. На какой высоте над лунным горизонтом для наблюдателя на Северном полюсе Луны может находиться верхний край Земли во время центрального полного лунного затмения? Орбиту Луны считать круговой.

Решение. Во время полного центрального лунного затмения Луна проходит через центр тени Земли, центры Солнца, Земли и Луны оказываются на одной прямой, а значит, центр Луны оказывается на эклиптике. В то же время линия Луна–Земля–Солнце лежит в плоскости лунной орбиты. Отсюда делаем вывод, что ось вращения Луны оказывается перпендикулярной направлению на Землю.

Нарисуем рисунок, на котором изобразим центры Луны и Земли M и E, полюс Луны P_{M} и точку на Земле, максимально удалённую от лунного экватора Q. Тогда $ME = a$ — радиус орбиты Луны, $MP_{\mathrm{M}} = R_{\mathrm{M}}$ — радиус Луны, $MQ = R_{\mathrm{E}}$ — радиус Земли. Под углом α видна над горизонтом часть земного радиуса $NQ = R_{\mathrm{E}} - R_{\mathrm{M}}$. Здесь в силу малости угла α мы пренебрегли тем, что линия $P_{\mathrm{M}}Q$ должна быть касательной к земному шару.



Теперь можно вычислить искомую величину α:

$$\alpha = \frac{R_{\mathrm{E}} - R_{\mathrm{M}}}{a} \cdot 57.3 = \frac{6370 - 1740}{384400} \cdot 57.3 \approx 0.69^\circ \approx 41'.$$

Критерии проверки

1. Ось вращения Луны перпендикулярна направлению на Землю **3 балла**

   Если этот вывод берется как данность, баллы за этап не выставляются, но остальное решение оценивается в полной мере.

   Если этот вывод не делается вообще, а анализируются разные варианты наклона оси Луны к направлению на Землю, то оставшаяся часть задачи оценивается из 6 баллов при правильном выполнении (правильный ответ $\pm \approx 7^\circ$).
2. Формула для вычисления углового размера **2 балла**
3. Правильно выбрана доля диаметра Земли над горизонтом **1 балл**
4. Правильный ответ **2 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(М. В. Силантьев)

Задача 4

У звезды TRAPPIST-1 открыта планетная система из 7 планет, вращающихся в одной плоскости в одну и ту же сторону. Отношение периода следующей планеты к периоду предыдущей можно записать как последовательность $\frac{8}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, то есть период второй планеты составляет $\frac{8}{5}$ периода первой, период третьей — $\frac{5}{3}$ периода второй и т. д. Первая планета совершает один оборот вокруг звезды за 1.5 суток. Определите величину орбитального периода самой дальней планеты. Как часто планеты 2 и 4 оказываются на одной линии с центральной звездой? Ответы дайте в сутках.

Решение. Пусть T_1 — орбитальный период первой, самой внутренней планеты. Тогда орбитальный период второй планеты равен $T_2 = \frac{8}{5}T_1$. Орбитальный период третьей планеты равен $T_3 = \frac{5}{3}T_2 = \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{5}T_1$. Орбитальный период седьмой планеты будет равен

$$T_7 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{8}{5} \cdot T_1 = \frac{24}{2}T_1 = 12T_1 = 18\,\text{суток}.$$

Выразим период четвёртой планеты в долях периода второй:

$$T_4 = \frac{3}{2}T_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3}T_2 = \frac{5}{2}T_2.$$

Предположим, что в некоторый момент времени звезда, планета 2 и планета 4 выстроились в линию в таком порядке. Когда такая конфигурация повторится в следующий раз, планета 2 сделает на один оборот по своей орбите больше, чем планета 4. Пусть n — число оборотов, совершённых планетой 4. Заметим, что n не обязательно целое. Тогда

$$nT_4 = (n+1)T_2.$$

Отсюда получаем

$$n = \frac{T_2}{T_4 - T_2} = \frac{T_2}{\frac{5}{2}T_2 - T_2} = \frac{2}{3}.$$

Значит, одинаковые конфигурации повторяются каждые $\frac{2}{3}$ оборота планеты 4 или $\frac{5}{3}$ оборота планеты 2.

К этому же ответу можно прийти, вспомнив, что интервал времени между одинаковыми конфигурациями планет называется синодическим периодом S. Он связан с периодами обращения планет вокруг звезды как

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_4} = \frac{T_4 - T_2}{T_2 T_4} = \frac{\frac{5}{2}T_2 - T_2}{\frac{5}{2}T_2^2} = \frac{3}{5T_2} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{5}{2}T_2.$$

Осталось отметить, что в одну линию эти две планеты выстраиваются в два раза чаще, ведь, прежде чем они вернутся в исходное положение, они ещё раз выстроятся в линию, когда звезда окажется между планетами. Искомое время равно

$$t = \frac{n+1}{2}T_2 = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{8}{5} \cdot T_1 = \frac{4}{3}T_1 = 2\,\text{сут}.$$

Критерии проверки

1. Правильный подход к вычислению T_7 **1 балл**
2. Получение правильного числового значения T_7 **2 балла**
3. Определение соотношения сидерических периодов планет 2 и 4 **1 балл**
4. Правильный способ определения синодического периода планет 2 и 4 **1 балл**
5. Правильное значение синодического периода **1 балл**
6. Замечено, что нужно найти половину S **1 балл**
7. Получено правильное значение t **1 балл**

Последний балл выставляется только при отсутствии ошибок и получении значения 2 сут.

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(М. В. Силантьев)

Задача 5

В 00:00 по местному времени 9 февраля корабль начал движение по экватору с постоянной скоростью, а к 00:00 10 февраля, также по местному времени, он преодолел уже 1670 км. Известно, что двигатели не позволяют развивать кораблю скорость больше 25 узлов. Календарь назад не переводили. Определите скорость корабля в узлах и направление движения.
Один узел равен одной морской миле в час, морская миля равна длине одной минуты земного меридиана.

Решение. Переведём пройденное кораблем расстояние в градусную меру. Пройденный путь во столько же раз меньше длины экватора ($\approx 40\,000$ км), во сколько его градусная мера меньше $360°$. Тогда

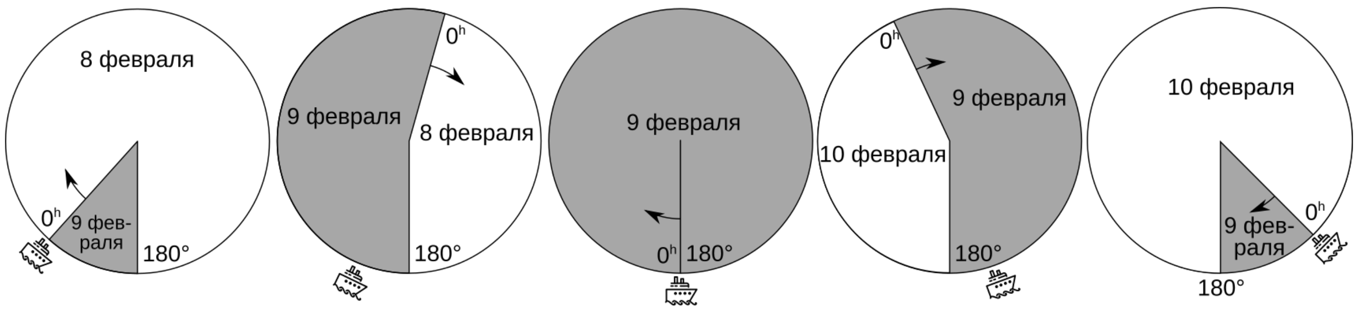
$$\lambda = 360° \frac{1670\text{ км}}{40\,000\text{ км}} \approx 15° = 900'.$$

Мы получили, что корабль за 24 часа преодолел 900 морских миль, то есть двигался со скоростью 37.5 узлов, что заметно превышает максимальную скорость корабля.

В этом рассуждении можно найти ошибку. На долготах, отличающихся на $15°$, местное время отличается на 1^h. Поэтому в пути корабль находился 23^h, если он двигался на восток, или 25^h, если он двигался на запад. Первый случай нам, очевидно, не подходит, поскольку тогда скорость получается ещё больше. Западное направление не подходит тоже, поскольку $900/25 \approx 36$ узлов, что опять слишком много. Значит, дело в чём-то другом.

Дата на корабле может измениться в двух случаях. Первый — очевидный, в полночь. Второй случай более редкий: дату на календаре нужно менять при пересечении линии перемены дат. К западу от этой линии дата на день больше, чем к востоку, всегда, кроме единственного исключения: в полночь, когда дата одинаковая с обеих сторон.

Рассмотрим движение корабля в деталях с помощью изображения ниже. Кроме линии перемены дат добавим ещё *линию полуночи*, которая обладает обратным свойством: к западу от нее дата на день меньше, чем к востоку.



В начальный момент времени корабль находится к западу от линии перемены дат и начинает двигаться на восток. В этот момент почти на всей Земле 8 февраля и только на небольшой её части уже наступило 9 февраля. Земля вращается вокруг своей оси с запада на восток, следовательно, линия полуночи движется на запад. К моменту, когда корабль достигает линии перемены дат, там же оказывается линия полуночи. В этот момент и к западу и к востоку от нее 9 февраля. На корабле вновь настаёт полночь 9 февраля. Дальше корабль движется на восток, где всё ещё 9 февраля. Выходит, что 10 февраля на корабле настанет лишь спустя $24^\text{h} + 23^\text{h} = 47^\text{h}$. Тогда скорость корабля $900/47 \approx 19$ узлов.

Критерии проверки

1. Пройденное расстояние в угловой мере **1 балл**
2. Пересечение линии перемены дат в местную полночь **3 балла**
3. Местное время в точках отправления и прибытия отличается на час **1 балл**
4. Между указанными в условии моментами прошло 47 часов **1 балл**
5. Правильное значение искомой скорости в узлах **1 балл**

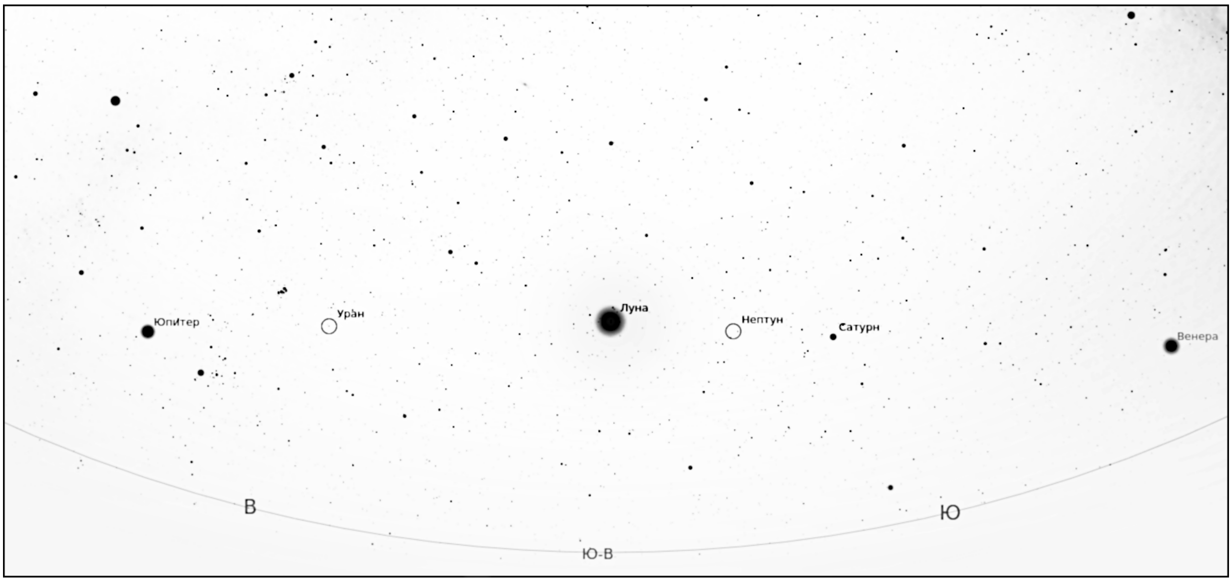
   Этот балл выставляется только если нет ошибок на предыдущих этапах.
6. Направление движения с правильным обоснованием **1 балл**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 6

На рисунке вы видите расположение планет и Луны на небе в некоторый момент времени. Через сколько дней после этого момента Луна будет находиться на небе вблизи отмеченных планет, если известно, что она проходит за 1 день расстояние, равное угловому расстоянию от звезды Альдебаран до скопления Плеяды. Определите время наблюдения с точностью до месяца. В какое время суток наблюдалась данная картина?

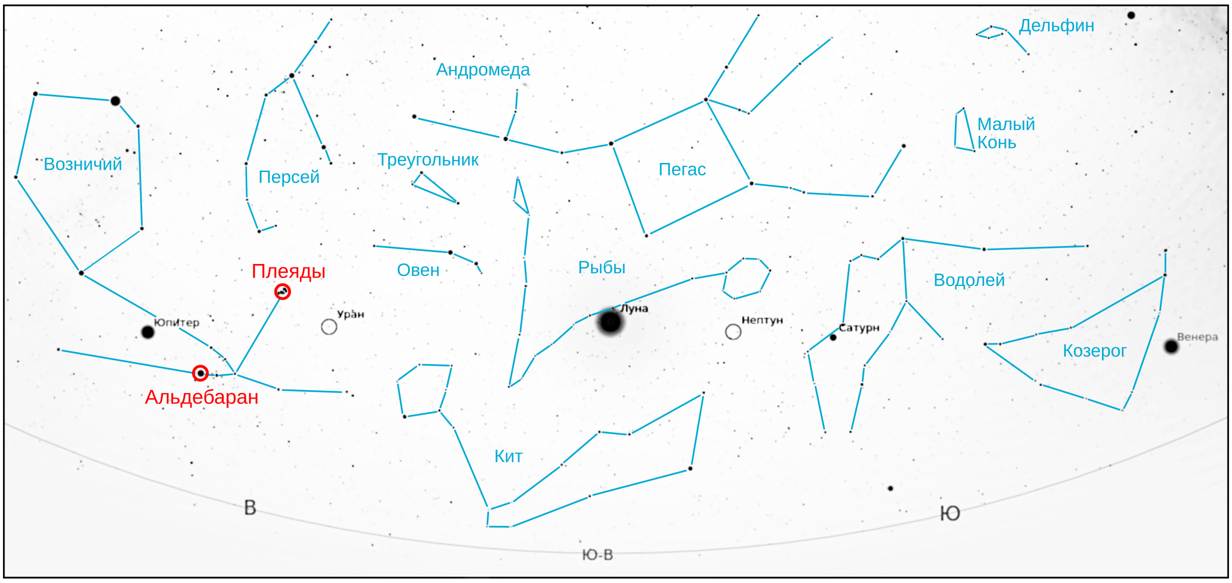


Решение. Ответим сначала на два последних вопроса. В правой части рисунка мы видим Венеру над юго-западным горизонтом. Венера никогда не удаляется от Солнца больше чем на 47°. На рисунок попала часть горизонта немногим менее 180°, следовательно, раз Солнца нет на рисунке, оно находится правее и, видимо, не слишком давно зашло за горизонт. Делаем вывод, что наблюдения проходят вечером.

Венера находится в Козероге, Луна в Рыбах, Юпитер в Тельце (см. рисунок ниже). Можно сделать вывод, что Солнце располагается в Стрельце или Змееносце, а значит, наблюдения происходили в декабре или январе. Также можно вспомнить, что телец восходит вечером в начале зимы.

Пусть x — угловое расстояние между Альдебараном (яркая звезда правее и ниже Юпитера) и Плеядами (звёздное скопление левее и выше Урана). Тогда угловое расстояние от Луны до Урана составляет $2.5x$, до Юпитера — $4x$, до Нептуна — $1.1x$, до Сатурна — $2x$ до Венеры — $5x$. Луна движется среди звёзд с запада на восток, т. е. налево на рисунке, значит, к Урану она приблизится через 2.5 дня, а к Юпитеру — через 4 дня. Вблизи трёх других планет Луна была незадолго до текущего положения, а значит, встретится с ними, завершая новый оборот по небу. Один оборот относительно звёзд Луна совершает за 27.3 сут. (сидерический период), поэтому около Нептуна она окажется через $27.3 - 1.1 \approx 26$ сут., а к Сатурну приблизится через $27.3 - 2 \approx 25$ сут.

Четыре рассмотренных внешних планеты сравнительно медленно перемещаются по небу, поэтому изменением их положения за месяц можно смело пренебречь. Другое дело — Венера, которая может двигаться довольно быстро. Если пренебречь движением Венеры, то до встречи с ней должно пройти $27.3 - 5 \approx 22$ сут.



Попробуем оценить скорость, с которой Венера перемещается по небу. Максимально быстро она перемещается вблизи верхнего соединения, когда орбитальные скорости Земли и Венеры складываются. Вблизи нижнего соединения, напротив, Венера движется попятно. Вблизи максимальной элонгации её скорость направлена практически вдоль луча зрения, а видимое смещение по небу происходит только за счёт движения Земли, т. е. Венера движется по небу со скоростью Солнца. Наблюдаемое положение Венеры скорее ближе к элонгации, чем соединению, его и примем в качестве оценки.

Луна совершает один оборот по небу в $365/27 \approx 13$ раз быстрее, чем Солнце. Значит, относительно Солнца/Венеры она движется медленнее в $(13-1)/13$ раз. Тогда для того, чтобы догнать Венеру, Луне потребуется $13/12 \cdot 25 \approx 24$ дня.

Замечание. Традиционно на звёздных картах размер кружка, которым обозначают звезду, тем больше, чем больше яркость звезды. То же самое касается Луны и планет. Если предположить, что видимый на карте размер Луны равен её угловому размеру, то можно легко показать, что он в несколько раз больше реального. Кроме того, тогда пришлось бы прийти к выводу, что, например, угловой размер Венеры всего в два раза уступает лунному, что тоже полная ерунда. Точно также по карте нельзя судить о фазе Луны. В реальности Луна была растущей.

Критерии проверки

1. Определение масштаба **2 балла**
2. Время до соединения с Юпитером, Сатурном, Ураном и Нептуном **по 1 баллу**

   Если движение Луны в другую сторону, то при правильном решении — **2 балла**.
3. Время до соединения с Венерой **2 балла**

   Если не учитывается движение Венеры — **1 балл**.
4. Обоснованный вывод, что наблюдение проходит вечером **2 балла**
5. Обоснованный вывод, что месяц — декабрь или январь **2 балла**

   За ответ ноябрь — **1 балл**. В остальных случаях — **0 баллов**.

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

(М. В. Силантьев)

Справочные данные

Данные о Солнце, Земле, Луне и Галактике

Светимость Солнца	$L_\odot = 3.827 \cdot 10^{26}$ Вт
Видимая звёздная величина Солнца	$m_\odot = -26.78^{\mathrm{m}}$
Абсолютная болометрическая звёздная величина Солнца	$M_\odot = 4.72^{\mathrm{m}}$
Эффективная температура Солнца	$T_\odot = 5800$ K
Солнечная постоянная	$E_\odot = 1360.8$ Вт м$^{-2}$
Поток солнечной энергии в видимых лучах на расстоянии Земли	$= 600$ Вт м$^{-2}$
Тропический год	$= 365.24219$ сут
Звёздные сутки	$= 23$ ч 56 мин 04 с
Наклон экватора к эклиптике	$\varepsilon = 23°26'21.45''$
Синодический месяц	$S_☾ = 29.530\,59$ сут
Видимая звёздная величина полной Луны	$m_☾ = -12.7^{\mathrm{m}}$
Число звёзд в нашей Галактике	$= 10 \cdot 10^{11}$
Радиус диска нашей Галактики	$= 20$ кпк
Масса нашей Галактики (в массах Солнца)	$= 2 \cdot 10^{12}$

Астрономические и физические постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ м^3 кг$^{-1}$ с$^{-2}$
Скорость света в вакууме	$c = 2.998 \cdot 10^8$ м с$^{-1}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$ кг с$^{-3}$ К$^{-4}$
Постоянная Планка	$\mathrm{h} = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Дж с
Масса протона	$m_{\mathrm{p}} = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг
Астрономическая единица	1 а. е. $= 1.496 \cdot 10^{11}$ м
Парсек	1 пк $= 3.086 \cdot 10^{16}$ м
Время накопления сигнала глазом	$= 0.05$ с

Формулы приближённого вычисления (при $x \ll 1$)

$$\sin(x) \approx x \qquad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \operatorname{tg} x \approx x$$

$$\ln(1+x) \approx x \qquad e^x \approx 1 + x \qquad (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

Характеристики Солнца, планет и некоторых спутников

Объект	Большая полуось, а.е.	Эксцен-триситет	Орбитальный период	Масса, кг	Радиус, тыс. км	Осевой период
Солнце				1.989×10^{30}	696	25.38 сут
Меркурий	0.3871	0.2056	87.97 сут	3.302×10^{23}	2.44	58.65 сут
Венера	0.7233	0.0068	224.70 сут	4.869×10^{24}	6.05	243.02 сут
Земля	1	0.0167	365.26 сут	5.974×10^{24}	6.37	23.93 ч
Луна	0.002 57	0.0549	27.322 сут	7.348×10^{22}	1.74	27.32 сут
Марс	1.5237	0.0934	686.98 сут	6.419×10^{23}	3.40	24.62 ч
Юпитер	5.2028	0.0483	11.862 лет	1.899×10^{27}	69.9	9.92 ч
Сатурн	9.5388	0.0560	29.458 лет	5.685×10^{26}	60.3	10.66 ч
Уран	19.1914	0.0461	84.01 лет	8.683×10^{25}	25.6	17.24 ч
Нептун	30.0611	0.0097	164.79 лет	1.024×10^{26}	24.7	16.11 ч