МГУ, ЦПМ, МЦНМО

Московская олимпиада школьников по вероятности и статистике
27 января 2024 г.

9 класс

Задача 1 (1 балл). В коробке много конфет тёмного шоколада и еще больше конфет белого шоколада. Четыре случайные конфеты случайным образом поделили между Валей и Колей поровну. Известно, что вероятность того, что у обоих окажутся по одной тёмной и одной белой конфете, равна α, а вероятность того, что хотя бы у одного из них окажутся тёмная и белая конфеты, равна β. Найдите вероятность того, что у Вали окажутся две конфеты одного цвета.

Задача 2 (1 балл). У папы есть коробка, в которой лежат одинаковые по размеру шары разных цветов: красного, жёлтого и синего. Вова собирается вынуть из коробки случайный шар. Он спрашивает папу: «Какого цвета шар мне вероятнее всего попадётся?» Папа отвечает: «Синего». Вова переспрашивает: «Значит, вероятнее всего, что мне попадётся синий шар?» «Нет, вероятнее всего, что синий шар тебе не попадётся», – отвечает папа. Какое наименьшее количество шаров может быть в коробке, если папа всегда говорит правду?

Задача 3. Кот Базилио предложил Буратино и Пьеро сыграть с ним в новую лотерею. Вначале Буратино и Пьеро вносят по 19 сольдо, а кот вносит 82 сольдо. Затем Буратино и Пьеро бросают по игральному кубику. Если число очков, выпавшее у Буратино, делится на число очков, выпавшее у Пьеро, то Буратино забирает свой выигрыш – в 20 раз больше сольдо, чем выходит в частном, а если не делится, то Буратино не получает ничего. Если число очков, выпавшее у Пьеро, делится на число очков, выпавшее у Буратино, то Пьеро забирает в 20 раз больше сольдо, чем выходит в частном, а если не делится, то не получает ничего. Деньги, оставшиеся после выплаты выигрышей Буратино и Пьеро, кот забирает себе. Кот утверждает, что игра честная, поскольку для каждого из троих игроков вероятность получить больше, чем игрок внёс вначале, одна и та же.

а) (1 балл) Верно ли, что вероятность получить больше первоначального взноса одна и та же для всех троих игроков?

б) (1 балл) Является ли игра честной с точки зрения среднего выигрыша, то есть верно ли, что математическое ожидание прибыли от лотереи равно 0 для каждого игрока?

Задача 4. Группа, в которой 27 студентов, сдает письменный зачёт по решению олимпиадных задач. Преподаватель заготовил зачётную работу в 3 вариантах и распределяет варианты случайным образом с единственным условием: количество тех, кто получил разные варианты, должно отличаться не больше чем на единицу. Перед зачётом между студентами Сергеем и Алексеем состоялся следующий диалог.

С: Вероятность того, что у нас с тобой окажется один и тот же вариант, равна $\frac{1}{3}$.

А: Если сегодня кто-то один не придёт на зачёт, то она окажется меньше, чем была бы, если бы пришли все.

С: Если сегодня не придут двое, то она окажется меньше, чем была бы, если бы не пришёл кто-то один.

а) (1 балл) Верно ли первое утверждение Сергея?

б) (1 балл) Верно ли утверждение Алексея?

в) (1 балл) Верно ли второе утверждение Сергея?

Задача 5 (2 балла). В случайном эксперименте 8 элементарных событий, и все они равновозможны. Пусть M – множество всех событий этого опыта, кроме невозможного (пустого) события. Событие $A \in M$ имеет вероятность 0,75. Сколько в множестве M случайных событий B таких, что события A и B независимы?

Задача 6 (3 балла). Имеются два несимметричных игральных кубика. Известно, что:

- вероятность выпадения 1 очка на первом кубике равна 0,14;
- вероятность выпадения 1 очка на втором кубике равна 0,35;
- при всех n от 2 до 6 отношение вероятности выпадения n очков к вероятности выпадения $n-1$ очков на первом кубике в точности в $\frac{n}{n-1}$ раз больше, чем это же отношение для второго кубика.

Найдите математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании второго кубика.