Московская предпрофессиональная олимпиада школьников. Математика. 8 класс. Теоретический тур отборочного этапа, 2023/24

1 ноя 2023 г., 10:00 — 20 ноя 2023 г., 23:59

№ 1, вариант 1

5 баллов

Сколько существует чётных пятизначных чисел, у которых вторая цифра больше четвертой в 2 раза?
Примечание: число десятков ненулевое.

1800

№ 1, вариант 2

5 баллов

Сколько существует нечётных пятизначных чисел, у которых вторая цифра меньше четвертой в 3 раза?
Примечание: число десятков ненулевое.

1350

№ 2, вариант 1

5 баллов

Требуется разменять 500 рублей монетами по 7 и 9 рублей, при этом необходимо использовать для размена наименьшее число монет. Сколько 7-рублёвых монет для этого потребуется?

2

№ 2, вариант 2

5 баллов

Требуется разменять 500 рублей монетами по 8 и 11 рублей, при этом необходимо использовать для размена наименьшее число монет. Сколько 8-рублёвых монет для этого потребуется?

2

№ 3, вариант 1

10 баллов

На плоскости даны четыре точки, никакие три не лежат на одной прямой. Все точки соединили и получили 12 углов. Пусть есть наименьший угол A. Какое наибольшее значение наименьшего угла могло получиться? Ответ выразите в градусах.

45

№ 3, вариант 2

10 баллов

На плоскости даны шесть точек, никакие три не лежат на одной прямой. Все точки соединили и получили 60 углов. Пусть есть наименьший угол B. Какое наибольшее значение наименьшего угла могло получиться? Ответ выразите в градусах.

54

№ 4, вариант 1

10 баллов

В первом магазине в среднем по 4 битых стакана в коробке, а во втором — по 6. Из первого магазина во второй перевезли 10 коробок, и среднее количество битых стаканов в каждом из магазинов уменьшилось на 1. Сколько всего коробок в двух магазинах?

20

№ 4, вариант 2

10 баллов

В первом магазине в среднем по 5 битых стаканов в коробке, а во втором — по 8. Из первого магазина во второй перевезли 10 коробок, и среднее к количество битых стаканов в каждом из магазинов уменьшилось на 2. Сколько всего коробок в двух магазинах?

15

№ 5, вариант 1

35 баллов

В параллелограмме $ABCD$ провели биссектрисы углов B и C. K — точка пересечения биссектрис. Биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке L и продолжение стороны CD за точку D в точке M. Найти отрезок BK, если $BC = 10$, а $LM = DM$.

5

№ 5, вариант 2

35 баллов

В параллелограмме $ABCD$ провели биссектрисы углов B и C. K — точка пересечения биссектрис. Биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке L и продолжение стороны CD за точку D в точке M. Найти отрезок BK, если $BC = 12$, а $LM = LD$.

6

№ 6, вариант 1

35 баллов

Найдите максимальное значение xy, если $5x^2 + 2x(1 - 2y) + y^2 + 1 = 0$

2

№ 6, вариант 2

35 баллов

Найдите максимальное значение xy, если $10x^2+2x(3y-2)+y^2+4=0$

-12

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

8 класс

Задание 1.1

Решение: Решение: на первом месте может быть любая из 9 цифр (кроме нуля). На третьем месте любая из 10 (ограничений нет). На последнем месте любая из 5 (подойдут только четные цифры). А во второй/четвертой позициях могут быть только 4 пары (2 и 1, 4 и 2, 6 и 3, 8 и 4). Итого $N = 9 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 5 = 1800$ чисел

Задание 1.2

Решение: Решение: на первом месте может быть любая из 9 цифр (кроме нуля). На третьем месте любая из 10 (ограничений нет). На последнем месте любая из 5 (подойдут только нечетные цифры). А во второй/четвертой позициях могут быть только 3 пары (1 и 3, 2 и 6, 3 и 9). Итого $N = 9 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 5 = 1350$ чисел

Задание 2.1

Решение: пусть было использовано x монет номиналом 7 рублей и y монет номиналом 9 рублей. Тогда можно составить уравнение $7x + 9y = 500$, где обе переменные – целые неотрицательные числа. Решение этого уравнения задается системой: $\begin{cases} x = 9n + 2 \\ y = 54 - 7n \end{cases}$. Чтобы использовать наименьшее число монет нужно, чтобы было как можно больше монет номиналом 9 рублей. Это будет при $n = 0$. При этом $y = 54, x = 2$.

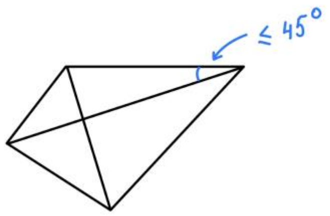
Задание 2.2

Решение: пусть было использовано x монет номиналом 8 рублей и y монет номиналом 11 рублей. Тогда можно составить уравнение $8x + 11y = 500$, где обе переменные – целые неотрицательные числа. Решение этого уравнения задается системой: $\begin{cases} x = 11n + 2 \\ y = 44 - 8n \end{cases}$. Чтобы использовать наименьшее число монет нужно, чтобы было как можно больше монет номиналом 11 рублей. Это будет при $n = 0$. При этом $y = 44, x = 2$.

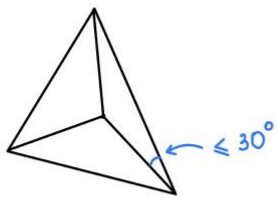
Задание 3.1

Решение: Пусть точки являются вершинами выпуклого четырехугольника. Тогда сумма углов такого четырехугольника 360°, значит один из углов точно не превосходит 90°. Диагональ делит этот угол на два угла, значит один из этих углов не больше 45°.

1 случай



2 случай

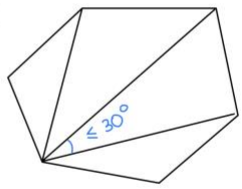


Если точки не являются вершинами выпуклого четырехугольника, тогда одна из них лежит внутри треугольника, образованного тремя другими. В таком треугольнике один из углов не превосходит 60°. Отрезок, соединяющий вершину этого угла и точку внутри треугольника делит угол на два. Один из этих углов не превосходит 30°. Получается из двух случаев наибольшее значение наименьшего угла будет 45°.

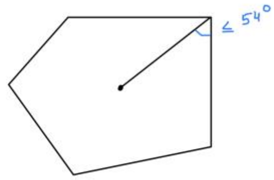
Задание 3.2

Решение: Пусть точки являются вершинами выпуклого шестиугольника. Тогда сумма углов такого шестиугольника 720°, значит один из углов точно не превосходит 120°. Диагонали делят этот угол на

1 случай



2 случай



четыре угла, значит один из этих углов не больше 30°. Если точки не являются вершинами выпуклого шестиугольника, тогда одна из них лежит внутри пятиугольника, образованного пятью другими. В таком пятиугольнике один из углов не превосходит 108°. Отрезок, соединяющий вершину этого угла и точку внутри пятиугольника делит угол на два. Один из этих углов не превосходит 54°. Получается из двух случаев наибольшее значение наименьшего угла будет 54°.

Задание 4.1

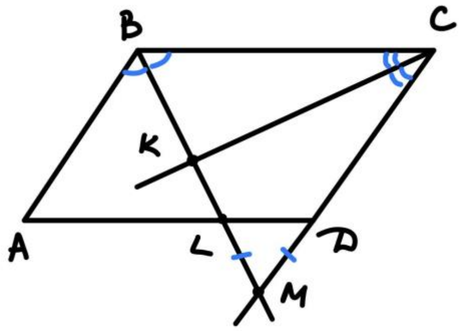
Решение: пусть в первом магазине x коробок, во втором – y коробок. Тогда общее число бракованных изделий в двух магазинах до перевозки: $4x + 6y$. После перевозки: $3(x - 10) + 5(y + 10)$. При этом число бракованных деталей не изменилось, а значит $3(x - 10) + 5(y + 10) = 4x + 6y$, откуда $x + y = 20$

Задание 4.2

Решение: пусть в первом магазине x коробок, во втором – y коробок. Тогда общее число бракованных изделий в двух магазинах до перевозки: $5x + 8y$. После перевозки: $3(x - 10) + 6(y + 10)$. При этом число бракованных деталей не изменилось, а значит $3(x-10)+6(y+10)=5x+8y$, откуда $x+y=15$

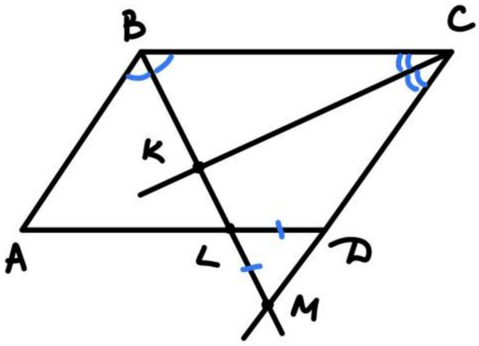
Задание 5.1

Решение: $\angle LBC = \angle MLD$, как соответственные углы при параллельных прямых BC и AD и секущей BM. $\angle MDL = \angle DCB$, как соответственные углы при параллельных прямых BC и AD и секущей CD. ML=MD, значит $\triangle LMD$ – равнобедренный. Тогда $\angle MDL = \angle MLD$, а значит $\angle MBC = \angle MCB$. Пусть $\angle LBC = x$. Тогда $\angle ABC + \angle BCD = 3x = 180°$. А значит $x = 60°$. Тогда $\angle LBC = 60°, \angle KCB = 30°$, и по сумме углов в треугольнике KBC $\angle BKC = 90°$. Тогда по свойству прямоугольного треугольника с углом 30°, $BK = \frac{1}{2}BC = 5$.



Задание 5.2

Решение: $\angle LBA = \angle LMD$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и секущей BM, $\angle MDL = \angle DCB$, как соответственные углы при параллельных прямых BC и AD и секущей CD. ML=LD, значит $\triangle LMD$ – равнобедренный. Тогда $\angle MDL = \angle DML$, а значит $\angle LBA = \angle MBC = \angle MCB$. Пусть $\angle LBC = x$. Тогда $\angle ABC + \angle BCD = 3x = 180°$. А значит $x = 60°$. Тогда $\angle LBC = 60°, \angle KCB = 30°$, и по сумме углов в треугольнике KBC $\angle BKC = 90°$. Тогда по свойству прямоугольного треугольника с углом 30°, $BK = \frac{1}{2}BC = 6$.



Задание 6.1

Решение: выражение в левой части — сумма двух полных квадратов: $(2x - y)^2 + (x + 1)^2 = 0$, а значит $x = -1, y = -2$ и $xy = 2$

Задание 6.2

Решение: выражение в левой части — сумма двух полных квадратов: $(3x + y)^2 + (x - 2)^2 = 0$, а значит $x = 2, y = -6$ и $xy = -12$