85-я Московская олимпиада школьников по физике
2024 год
11 класс, тур 1

1. График потенциала (6 баллов)

Три одинаковых тонких диска радиусом R, однородно заряженных с поверхностной плотностью σ, 2σ и -3σ, расположены так, что ось OX является общей осью этих дисков, при этом центры дисков находятся в точках с координатами 0, d и $2d$, где $d = \frac{R}{1000}$. Потенциал в центре уединённого диска, заряженного однородно с поверхностной плотностью σ, равен 1000 В. Потенциал бесконечно удалённой точки считается равным нулю.

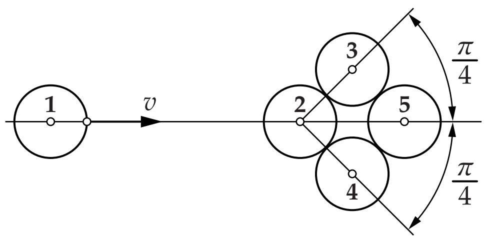
a) (*2 балла*) Получите формулу $\varphi_0 = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$, дающую потенциал в центре уединённого однородно заряженного диска. Эту формулу разрешается использовать при выполнении задания следующего пункта, даже если вы не можете её вывести.

b) (*4 балла*) Изобразите график зависимости потенциала φ электрического поля дисков в точках, лежащих на оси OX, от безразмерной координаты $a = \frac{x}{d}$ для значений a, принадлежащих отрезку $[0;\ 2]$.

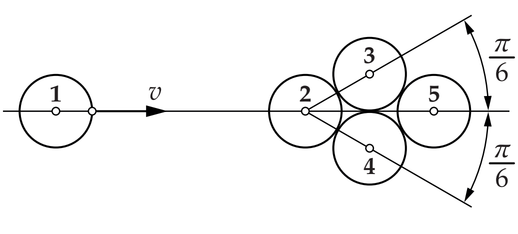
2. Аэрохоккей (8 баллов)

Шайбы одинаковой массы могут скользить по горизонтальной поверхности без трения. Боковая поверхность шайб гладкая, столкновения между шайбами можно считать абсолютно упругими.

a) (*2 балла*) В начальный момент шайбы 2, 3, 4, 5 располагаются так, что их центры являются вершинами квадрата (см. рисунок), шайба 1 налетает на шайбу 2 со скоростью $v = 1$ м/с. Найдите скорости шайб после того, как все столкновения прекратятся.



b) (*6 баллов*) В этом случае центры неподвижных шайб образуют ромб с острым углом $\frac{\pi}{3}$ (см. рисунок), шайба 1 налетает на шайбу 2 с такой же скоростью $v = 1$ м/с, как и в первом случае. Найдите скорости шайб после того, как все столкновения прекратятся.



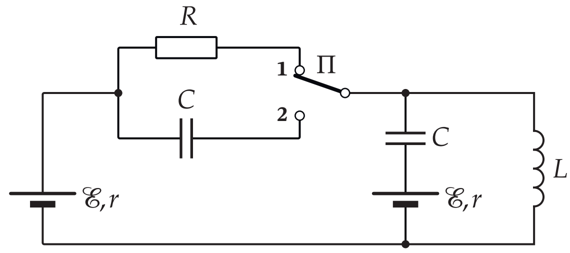
В обоих случаях считайте, что столкновения происходят мгновенно. За время столкновения шайбы не успевают сдвинуться. В точках на рисунке, где шайбы касаются друг друга, на самом деле они разделены микроскопическими воздушными зазорами.

3. С двумя батарейками (8 баллов)

В цепи, схема которой изображена на рисунке, представленном ниже, параметры $\mathscr{E}$, L, C известны. Сопротивление соединительных проводов и катушки равно нулю. Внутреннее сопротивление батареи r и сопротивление резистора R удовлетворяют соотношениям

$$r \ll R, \qquad rC \ll \sqrt{LC}, \qquad RC = \sqrt{2LC}.$$

Изначально переключатель П находится в положении 1, при этом в цепи установился стационарный режим. Напряжение на конденсаторе, соединённом с клеммой 2, равно нулю. В момент времени $t = 0$ переключатель мгновенно переводят в положение 2.



a) (*6 баллов*) Определите, в какой момент времени t_L ток через катушку впервые изменит направление.

b) (*2 балла*) Какое количество теплоты Q выделится в цепи за очень большое время после перевода ключа в положение 2.

4. Накачивая шину (15 баллов)

В задаче рассматривается физическая модель, описывающая некоторые особенности процесса накачивания камеры велосипедного колеса. Объём камеры V_0 считается неизменным. Начальное давление воздуха в камере равно P_0 при температуре окружающей среды T_0. После накачивания воздух в камере должен создавать давление P при той же температуре T_0. Воздух считается идеальным двухатомным газом ($c_V = 2{,}5R$).

a) (*6 баллов*) В этом пункте камеру соединяют через ниппель с сосудом очень большого объёма V_1 ($V_1 \gg V_0$), который содержит воздух при температуре T_0 и таком давлении $P_{\max}$ ($P_{\max} > P$), что после заполнения камеры и её охлаждения до температуры T_0 давление воздуха в камере становится равно P. Ниппель пропускает воздух в камеру, до тех пор пока давление в ней не сравняется с давлением в сосуде, после этого ниппель закрывается и обратно воздух не выпускает.

«Проталкивание» в камеру порции воздуха из сосуда происходит очень быстро, поэтому можно считать, что процесс «проталкивания» осуществляется без теплообмена между этой порцией и воздухом, остающимся в сосуде, а также между воздухом в камере и окружающей средой. В результате температура и давление воздуха в камере повышаются до значений $P_{\max}$ и $T_{\max}$. Через некоторое время после этого температура воздуха в камере сравнивается с температурой окружающей среды T_0, давление в камере становится равно P.

Считая известными значения $T_0 = 300$ К, $P = 3 \cdot 10^5$ Па и $P_0 = 10^5$ Па, определите $P_{\max}$ и $T_{\max}$.

b) Теперь представим себе, что камера накачивается воздухом при помощи ручного насоса. В начале каждого цикла цилиндр насоса объёмом V_C ($V_C \ll V_0$) заполняется воздухом при атмосферном давлении P_0 и температуре T_0. Пусть в начале i-го цикла давление в камере равно P_{i-1}. На i-м цикле воздух в цилиндре сначала адиабатически сжимается поршнем от давления P_0 до давления P_i, а затем «проталкивается» через ниппель при постоянном давлении P_i без теплообмена, как в пункте а) задачи. После этого открывается впускной клапан, через который в цилиндр насоса поступает воздух из окружающей среды при давлении P_0, поршень отодвигается в исходное положение, цилиндр заполняется атмосферным воздухом при давлении P_0. На этом цикл заканчивается. Естественно, придётся совершить довольно много ($N \gg 1$) таких циклов «проталкивания» воздуха в камеру, для того чтобы после установления температуры T_0 давление в камере стало равно P. Поскольку накачивание камеры происходит очень быстро, теплообмен между воздухом в камере и окружающей средой начинается уже после окончания работы насоса.

b1) (*1 балл*) Сколько циклов N необходимо совершить, чтобы накачать камеру? Параметры P_0, P, V_C и V_0 считаются известными.

b2) (*3 балла*) Какую работу A_i совершает поршень на i-м цикле? Ответ выразите через P_0, P_i и V_C.

b3) (*2 балла*) Определите изменение давления в камере на i-м цикле ΔP_i, считая P_0, P_i, V_C и V_0 известными.

b4) (*2 балла*) Для того чтобы найти давление в камере после окончания k-го цикла, используем следующий приём. Соотношение, полученное в предыдущем пункте, можно представить в виде

$$\frac{\Delta P_i}{f(P_i)} = \alpha, \qquad (1)$$

где $f(P_i)$ — некоторая функция P_i, α — коэффициент, не зависящий от P_i (α и $f(P_i)$ вам известны, если вы сделали пункт b3). Просуммируем выражения, даваемые формулой (1), от $i = 1$ до $i = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta P_i}{f(P_i)} = \alpha \cdot k. \qquad (2)$$

Суммирование в формуле (1) можно приближённо заменить на интегрирование:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\Delta P_i}{f(P_i)} \approx \int_{P_0}^{P_k} \frac{dP}{f(P)}.$$

Определите давление P_k в камере после k-го цикла. Параметры P_0, V_C, V_0 и k считаются известными.

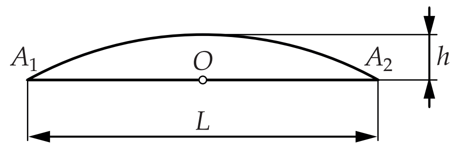
b5) (*1 балл*) Вычислите $P_{\max}$ и $T_{\max}$, считая известными значения параметров $T_0 = 300$ К, $P = 3 \cdot 10^5$ Па и $P_0 = 10^5$ Па.

Указание. Значение определённого интеграла от степенной функции даётся формулой

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{(k-1)} \left(\frac{1}{a_1^{k-1}} - \frac{1}{a_2^{k-1}} \right).$$

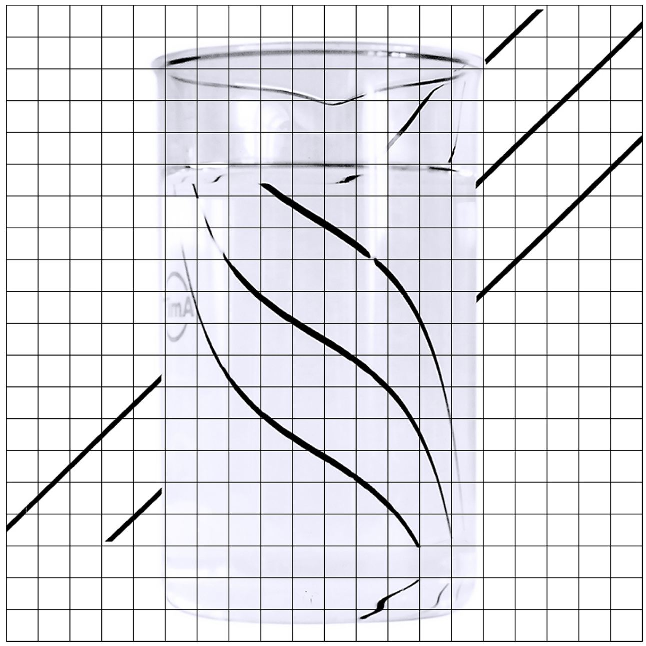
5. Цилиндрическая линза (10 баллов)

Если цилиндр из стекла с показателем преломления n разрезать по плоскости, параллельной оси цилиндра, то получится цилиндрический сегмент, который с оптической точки зрения представляет собой цилиндрическую линзу. Если толщина этой линзы h (см. рисунок) мала по сравнению с её шириной L и радиусом кривизны выпуклой поверхности R, то можно говорить о тонкой цилиндрической линзе. Для такой линзы поперечное увеличение имеет разные значения в разных направлениях. В направлении вдоль оси O поперечное увеличение равно 1, иначе говоря, размеры предмета и изображения вдоль этой оси одинаковые. Осью O мы называем прямую, параллельную оси исходного цилиндра, проходящую через середину хорды A_1A_2 (см. рисунок).



a) (*3 балла*) Пусть на плоскую сторону тонкой цилиндрической линзы падает параллельный пучок света круглого сечения. Ось пучка перпендикулярна плоской поверхности линзы и пересекает ось O линзы. Радиусы пучка и выпуклой поверхности линзы равны r и R соответственно, показатель преломления материала линзы равен $n = \frac{4}{3}$. За линзой на расстоянии $2R$ от неё располагается экран, параллельный плоскости линзы. Определите площадь светлого пятна на экране. Все лучи пучка проходят через линзу.

b) (*7 баллов*) Тонкостенная мензурка диаметром 80 мм (толщиной стенок можно пренебречь) заполнена водой (показатель преломления равен 1,33) и стоит на горизонтальном столе на неизвестном расстоянии от вертикальной стены. На стене закреплён лист, на котором изображены три прямые параллельные линии. Их наблюдают через мензурку. Используя фотографию, приведённую ниже (увеличенный вариант см. на дополнительном листе), определите расстояние от оси мензурки до стены.



Ось объектива фотоаппарата при фотографировании старались ориентировать перпендикулярно стене. В процессе обработки в графическом редакторе фотографию обрезали, поверх изображения была нанесена сетка.