

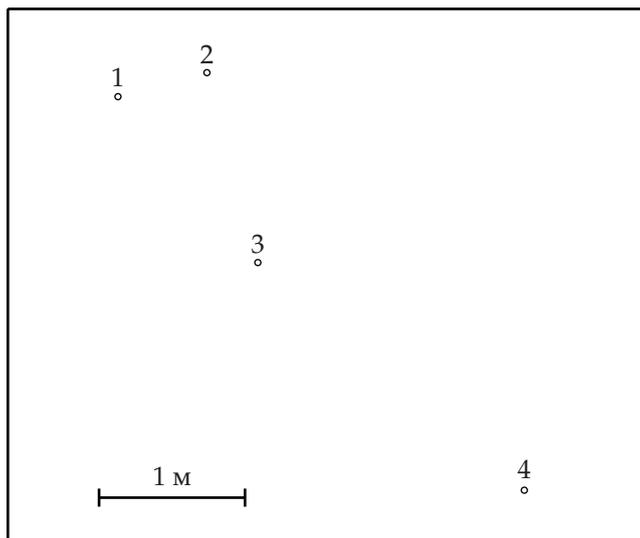


Условия задач, авторские решения и критерии оценивания

1. Построение (7 баллов)

Крюков П. А.

Обруч скользит по гладкой горизонтальной поверхности так, что плоскость обруча остаётся горизонтальной. Скорость оси обруча и частота его обращения вокруг этой оси, равная одному обороту в секунду, со временем не меняются. В некоторой точке обруча закреплена лампочка, ярко вспыхивающая через равные промежутки времени с частотой 4 раза в секунду. На фотографии, сделанной сверху с большой выдержкой, с сохранением пропорций изображаемых предметов, можно видеть положение лампочки во время вспышек, следующих друг за другом. Рисунок, представленный ниже (увеличенную версию см. на дополнительном листе), выполнен по фотографии, на нём точками обозначены места вспышек, а цифрами их номера в порядке появления.



Используя линейку с делениями и циркуль, найдите скорость оси и радиус обруча. Отрезок, соответствующий расстоянию в 1 метр, показан в нижней части рисунка.

Решение

Задача может быть решена разными способами. Покажем один из них, наиболее простой по мнению автора.

Пусть $\{\mathbf{r}_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ совокупность радиус-векторов точек, изображённых на рисунке, в некоторой системе координат; $\{\mathbf{R}_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ — это совокупность радиус-векторов точек, изображающих центр диска в моменты вспышек. Обозначим \mathbf{a} — вектор, проведённый из точки изображающей центр диска к точке, изображающей лампочку в моменты первой вспышки, вектор \mathbf{b} — аналогичный вектор для момента второй вспышки.

Справедливы соотношения

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{a}, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{v} \cdot 2t - \mathbf{a}, \quad (1)$$

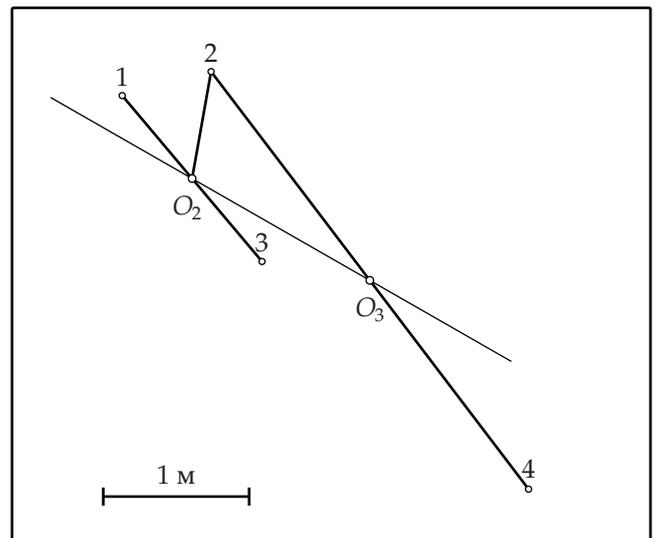
в которых \mathbf{v} — скорость движения центра диска. Для моментов второй и четвёртой вспышек верны соотношения

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{r}_4 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{v} \cdot 2t - \mathbf{b}. \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следуют формулы

$$\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}{2} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{v} \cdot t = \mathbf{R}_2, \quad \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4}{2} = \mathbf{R}_3. \quad (3)$$

Легко видеть, что полусумма векторов $\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}{2}$ — есть радиус-вектор середины отрезка, соединяющего точки 1 и 3. Отсюда следует вывод о том, что точка, изображающая центр диска в момент второй вспышки, совпадает с серединой отрезка 13. Аналогично, точка, изображающая центр диска в момент третьей вспышки, совпадает с серединой отрезка 24.



Таким образом, построение содержит следующие шаги. Строим середины отрезков 13 и 24 (точки O_2 и O_3 соответственно на рисунке). Длина отрезка $O_2 2$ равна радиусу диска. За четверть секунды, точка, изображающая центр диска проходит путь, соответствующий длине отрезка $O_2 O_3$.

Измерения по чертежу, сделанные после построений при помощи линейки дают $O_2 2 = 34,5$ мм, $O_2 O_3 = 64,5$ мм. Сравнив при помощи линейки найденные длины с длиной отрезка, соответствующего длине 1 метр, получаем искомые величины $R \approx \frac{34,5}{45}$ м = 0,75 м, $v \approx \frac{64,5}{45} \cdot 4$ м/с $\approx 5,7$ м/с.

Ответ: $R = (0,75 \pm 0,05)$ м, $v = (5,7 \pm 0,5)$ м/с.

Критерии

№	Критерий	Балл
1.1	Предложен метод определения радиуса, приводящий к верному ответу в случае аккуратной реализации.	3,0
1.2	Получен ответ для радиуса диска, попадающий в диапазон $R = (0,75 \pm 0,05)$ м.	1,0

№	Критерий	Балл
1.3	Предложен метод определения скорости оси диска, приводящий к верному ответу в случае аккуратной реализации.	2,0
1.4	Получен ответ для скорости оси диска, попадающий в диапазон $v = (5,7 \pm 0,5)$ м/с.	1,0

Если нет верных ответов, также не предлагаются непротиворечивые методы построения, но верно построена траектория оси диска, то за задачу выставляется 2 балла.

2. И покой, и скольжение (9 баллов) Крюков П. А.

Изучая силу трения в рамках школьного курса физики, обычно говорят о том, что максимальное значение силы трения покоя равно силе трения скольжения. На самом деле, для того, чтобы вывести тело из состояния покоя, необходимо приложить силу несколько большую силы трения скольжения. Поэтому имеет смысл говорить о двух коэффициентах: коэффициенте трения покоя μ_r и коэффициенте трения скольжения μ_s ($\mu_s < \mu_r$). Сила трения покоя удовлетворяет соотношению $F_{\text{тр.пок.}} \leq \mu_r N$. После перехода к скольжению для определения силы трения используется другой коэффициент $F_{\text{тр.ск.}} = \mu_s N$.

А. (4 балла) Для деревянного бруска массой m , располагающегося на протяжённой деревянной горизонтальной поверхности, коэффициенты трения покоя и скольжения равны $\mu_r = 0,5$ и $\mu_s = 0,4$ соответственно. На брусок начинает действовать периодически изменяющаяся горизонтальная сила, проекция которой на горизонтальную ось Ox на первой половине периода равна $F_x^{(1)} = 1,001\mu_r mg$, а на второй половине периода меняет знак и становится равна $F_x^{(2)} = -1,001\mu_r mg$. Изобразите графически зависимость скорости бруска от времени в течение двух периодов спустя большое время после начала процесса. Период изменения силы равен $T = 4$ с, ускорение свободного падения равно 10 м/с^2 .

Б. (5 баллов) Две доски одинаковой массы m лежат друг на друге и на длинном горизонтальном деревянном столе (см. рисунок). Коэффициенты трения покоя и скольжения между всеми поверхностями равны $\mu_r = 0,5$ и $\mu_s = 0,4$.



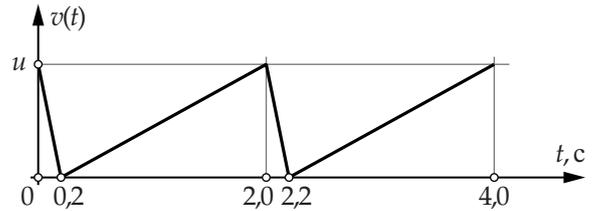
Б1) (2 балла) На верхнюю доску действует внешняя горизонтальная сила $F(t)$, прямо пропорциональная времени $F(t) = \frac{\mu_r mg t}{t_0}$. Изобразите график зависимости ускорения верхней доски от времени для $t \in [0, 4t_0]$.

Б2) (3 балла) Пусть теперь внешняя горизонтальная сила $F(t) = \frac{\mu_r mg t}{t_0}$ действует на нижнюю доску. Изобразите график зависимости ускорения нижней доски от времени для $t \in [0, 4t_0]$.

В обоих случаях доски изначально покоятся. В процессе движения одна доска не падает с другой.

Решение

А. Анализ показывает, что в каждый момент времени брусок движется с ускорением, которое по абсолютной величине может быть равно $a_1 \approx (\mu_r - \mu_s)g = 1 \text{ м/с}^2$ или $a_2 \approx (\mu_r + \mu_s)g = 9 \text{ м/с}^2$. Спустя длительное время после начала процесса установится квазистационарный режим, и проекция скорости бруска в зависимости от времени будет меняться периодически. В течение периода за время $\tau = \frac{T}{20}$ модуль скорости уменьшается от значения u до нуля, а затем за время 9τ увеличивается от нуля до u (см. рисунок, представленный ниже, $\tau = 0,2$ с). Значение максимальной скорости в квазистационарном режиме равно $u = 1,8 \text{ м/с}$.



Можно дать доказательство того факта, что спустя длительное время после начала процесса установится квазистационарный режим. Действительно обозначим v_k — значение модуля скорости бруска спустя время $\frac{kT}{2}$ после начала процесса. Справедливо рекуррентное соотношение

$$v_{k+1} = 2 \text{ м/с} - \frac{v_k}{9}, \quad (4)$$

при этом $v_1 = 2 \text{ м/с}$. Введём обозначение $w_k = v_k - u$, где $u = 1,8 \text{ м/с}$. Из формулы (4) следует соотношение

$$w_{k+1} = -\frac{w_k}{9},$$

а из него формула для $(k + 1)$ -го члена последовательности

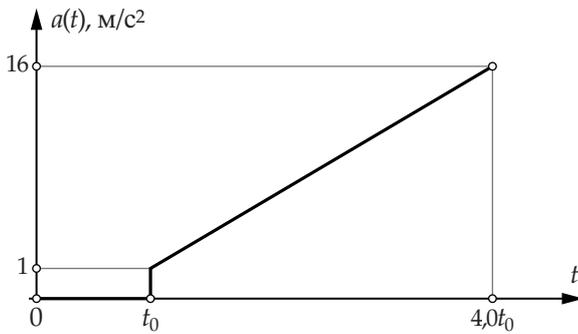
$$w_{k+1} = 0,2 \cdot \frac{(-1)^k}{9^k},$$

которая является убывающей геометрической прогрессией. Легко видеть, что предел последовательности $\{w_k\}$ при $k \rightarrow \infty$ равен нулю. Это означает, что при больших k значение v_k стремится к u .

Б. Б1) Сразу заметим, что нижняя доска при любом значении внешней силы будет оставаться в покое, поскольку максимальное значение силы трения покоя, действующей на неё со стороны стола, равно $2\mu_r mg$, а максимальная сила, действующая на нижнюю доску со стороны верхней равна $\mu_r mg$. Таким образом, при значении внешней силы меньше $\mu_r mg$, ускорение верхней доски равно нулю, а при значении больше $\mu_r mg$ равно

$$a(t) = \frac{\mu_r g t}{t_0} - \mu_s g, \quad (5)$$

Искомый график изображён на рисунке, представленном ниже.



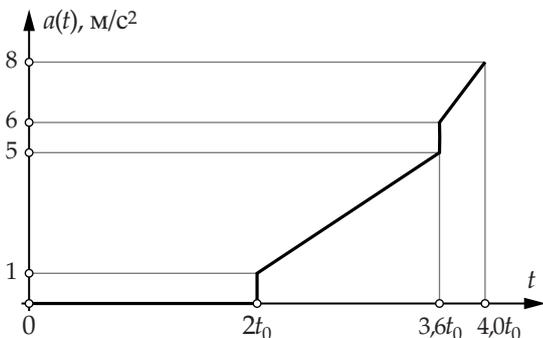
Б2) В этом случае движение начнётся, когда внешняя сила станет больше значения $2\mu_r mg = mg$, это произойдёт в момент времени $t_1 = 2t_0$, далее верхняя доска будет двигаться совместно с нижней с ускорением, даваемым формулой $a(t) = \frac{\mu_r g t}{2t_0} - \mu_s g$, похожей на формулу (5). Позднее в некоторый момент времени начнётся проскальзывание верхней доски по нижней. Значение внешней силы в этот момент будет удовлетворять соотношению

$$\frac{F - 2\mu_s mg}{2m} \cdot m = \mu_r mg. \quad (6)$$

Решив уравнение (6), находим критическое значение силы $F = 2(\mu_s + \mu_r) mg = 1,8mg$. Этому значения сила достигает в момент времени $t = 3,6t_0$. Далее нижняя доска будет двигаться с ускорением большим ускорения верхней доски. Зависимость ускорения нижней доски от времени в этом случае будет задаваться формулой

$$a(t) = \frac{\mu_r g t}{t_0} - 3\mu_s g. \quad (7)$$

Искомый график можно видеть на рисунке, представленном ниже.



Критерии

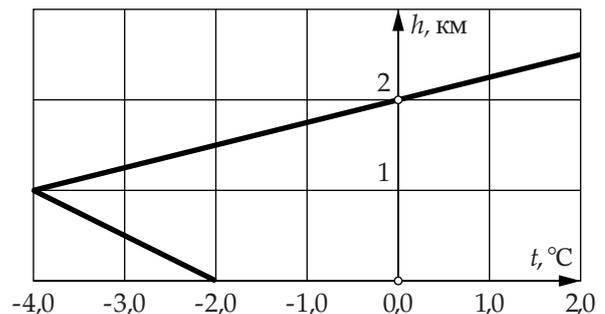
№	Критерий	Балл
2.A1	Указывается, что ускорение бруска по абсолютной величине может быть равно $a_1 \approx 1 \text{ м/с}^2$ или $a_2 \approx 9 \text{ м/с}^2$.	0,5
2.A2	Указывается, что спустя длительное время после начала процесса, скорость будет меняться периодически. Доказательство давать не обязательно.	1,0
2.A3	Получен верный качественный эскиз графика или словами описан характер изменения скорости (или проекции скорости) бруска от времени	1,0

№	Критерий	Балл
2.A4	Верно найдено значение максимальной скорости $u = 1,8 \text{ м/с}$	0,5
2.A5	Верно найдены времена движения с разным ускорением 0,2 с и 1,8 с.	0,5
2.A6	Построен верный график для модуля скорости (или для проекции скорости) с указанием координат особых точек.	0,5
2.Б1.1	Указывается, что график содержит два участка: участок с нулевым ускорением и участок с ускорением, изменяющимся линейно в зависимости от времени.	0,5
2.Б1.2	Изображён график, имеющий верную форму.	0,5
2.Б1.3	На графике указаны верные координаты точек излома.	1,0
2.Б2.1	Указывается, что график содержит три участка: участок с нулевым ускорением и два участка с разными линейными зависимостями ускорения от времени.	0,5
2.Б2.2	Изображён график, имеющий верную форму.	0,5
2.Б2.3	Найдены верные координаты точек, описывающих первый скачок на графике ускорения: момент времени $2t_0$, значение после скачка 1 м/с^2 .	0,5
2.Б2.4	Найден верный момент времени $3,6t_0$ второго скачка ускорения.	0,5
2.Б2.5	Найдено верное значение ускорения непосредственно перед вторым скачком 5 м/с^2 .	0,2
2.Б2.6	Найдено верное значение ускорения сразу после второго скачка 6 м/с^2 .	0,3
2.Б2.7	Найдено верное значение ускорения в момент времени $4t_0$: 8 м/с^2 .	0,5

3. Замерзающие капли (5 баллов)

Крюков П. А.

При температурной инверсии график зависимости температуры воздуха t вблизи поверхности Земли от высоты h может иметь вид, показанный на рисунке линией чёрного цвета увеличенной толщины.



Пусть капля, имеющая форму шара, движется вниз с постоянной скоростью под действием силы тяжести и силы

сопротивления воздуха. На высоте $h_0 = 2$ км температура капли оказывается равна $t_c = 0^\circ\text{C}$. В процессе дальнейшего падения часть капли (или вся капля) превращается в лёд вследствие теплообмена с холодным атмосферным воздухом.

Мощность теплообмена P и сила сопротивления воздуха F_d даются формулами

$$P = \alpha(t_c - t)S, \quad F_d = \beta S v^2,$$

где S — площадь поверхности капли, α и β — некоторые константы, t и t_c — температуры окружающего воздуха и капли (на одной высоте), v — скорость капли.

Рассмотрим две капли. Радиус первой капли в 2,25 раз меньше радиуса второй. В процессе падения с высоты 2 км первой капли четверть её массы превращается в лёд. Какая часть массы второй капли превратится в лёд?

Считайте теплопроводность льда высокой, так что температура всех точек капли остаётся одинаковой, пока капля полностью не превратилась в лёд. Изменением радиуса капли при её частичном превращении в лёд можно пренебречь.

Решение

Обозначим $\Delta T(h) = (t_c - t(h))$ — разность температур капли и окружающей среды на высоте h (большая буква используется для обозначения разности температур, чтобы избежать путаницы с временем). Пусть за малое время Δt замерзает небольшая масса капли Δm , тогда справедливо соотношение

$$\lambda \Delta m = \alpha \Delta T(h) S \Delta t.$$

Пусть скорость капли равна v , тогда это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{\lambda v \Delta m}{\alpha S} = \Delta T(h) \Delta h. \quad (8)$$

При суммировании выражений, стоящих в правой части формулы (8), получается величина, численно равная площади фигуры, ограниченной графиком профиля температуры, осями абсцисс и ординат. Эта площадь не зависит от размера капли и скорости её падения. Таким образом, суммарная масса, превращающаяся в лёд в процессе падения, пропорциональна площади её поверхности и обратно пропорциональна скорости падения

$$m \propto \frac{S}{v} \propto \frac{R^2}{v}. \quad (9)$$

Символ « \propto » означает пропорциональность. Скорость падения определяется из равенства силы сопротивления и силы тяжести:

$$Mg = \beta S v^2 \Rightarrow v^2 \propto \frac{\rho V}{S} \propto R. \quad (10)$$

Комбинируя соотношения (9), (10), и учитывая, что масса капли пропорциональна R^3 , получаем для доли замерзающей массы соотношение

$$n = \frac{m}{M} \propto \frac{R^{\frac{3}{2}}}{R^3} \propto R^{-\frac{3}{2}}. \quad (11)$$

Из формулы (11) следует, что доля массы большой капли, превращающаяся в лёд, равна

$$n = \frac{1}{4} \cdot (2,25)^{-\frac{3}{2}} = \frac{2}{27} \approx 7,4 \%$$

Ответ: $n = \frac{2}{27} \approx 7,4 \%$.

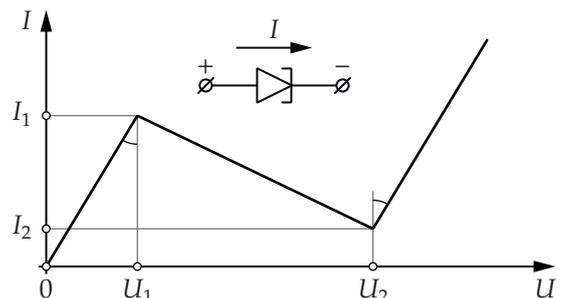
Критерии

№	Критерий	Балл
3.1	Получено соотношение $\frac{\lambda v \Delta m}{\alpha S} = \Delta T(h) \Delta h$, связывающее массу, замерзающую при перемещении на Δh , и перемещение Δh (или аналогичное).	0,5
3.2	Указывается, что замерзающая масса вне зависимости от размера капли пропорциональна площади фигуры, ограничиваемой профилем температуры, осями абсцисс и ординат.	1,0
3.3	Получено соотношение $m \propto \frac{R^2}{v}$ (или аналогичное), связывающее массу замерзающей воды с радиусом капли и скоростью её падения.	0,5
3.4	Получено соотношение $v^2 \propto R$ (или аналогичное), связывающее скорость падения капли и её радиус.	0,5
3.5	Получено соотношение $m \propto R^{\frac{3}{2}}$ (или аналогичное), показывающее, как замерзающая масса связана с размером капли.	1,0
3.6	Получено соотношение $n \propto R^{-\frac{3}{2}}$ для доли массы капли, превращающейся в лёд.	0,5
3.7	Получен верный числовой ответ $n = \frac{2}{27} \approx 7,4 \%$.	1,0

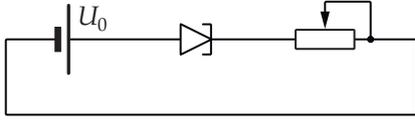
4. Схемы с туннельным диодом (7 баллов)

Крюков П. А.

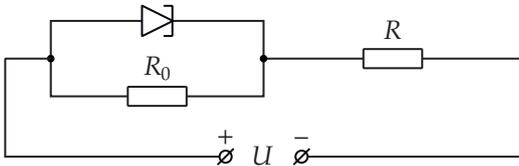
Идеализированная вольт-амперная характеристика нелинейного элемента под названием *туннельный диод* изображена на рисунке, представленном ниже. Условное обозначение туннельного диода на схемах показано в верхней части рисунка. Там же над символом диода указано положительное направление тока через него. Обозначенные на графике токи и напряжения I_1, I_2, U_1 и U_2 будем называть параметрами диода. Обозначенные на графике углы считаем равными.



А. (2 балла) Рассмотрим туннельный диод, параметры которого равны $I_1 = 4I_2 = 4i$, $U_2 = 4U_1 = 4u$, при этом значения i и u считаются известными. Этот диод подключили к идеальному источнику с напряжением $U_0 = 6u$, последовательно с переменным резистором, сопротивление которого может меняться в широких пределах (см. рисунок, представленный ниже). При каких значениях сопротивления резистора значение тока в цепи определяется однозначно?



Б. (5 баллов) Параметры другого туннельного диода равны $I_1 = 10$ мА, $I_2 = 1$ мА, $U_1 = 0,2$ В, $U_2 = 0,8$ В. При помощи этого диода и балластного резистора R_0 собрали цепь по схеме, показанной на рисунке.



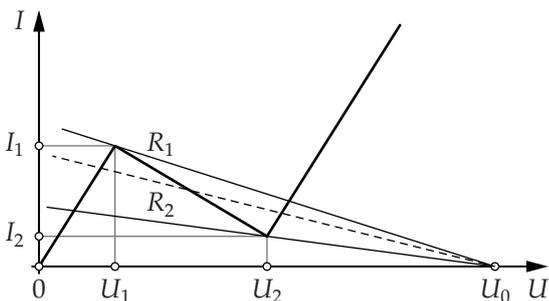
Известно, что ток через резистор R в этой цепи имеет одно и то же значение при любом входном напряжении из диапазона $U = 3,2 \pm 0,2$ В.

Б1) (2 балла) Найдите сопротивление балластного резистора R_0 .

Б2) (3 балла) Чему может быть равно сопротивление нагрузки R ? Укажите границы диапазона возможных значений R_{\min} и R_{\max} .

Решение

А. Обозначим $V(I)$ зависимость напряжения на туннельном диоде от текущего через него тока. Тогда ток в рассматриваемой цепи определяется уравнением $U_0 - IR = V(I)$, количество решений которого зависит от величины параметра R . Графический метод решения этого уравнения состоит в определении координат точки (или точек) пересечения вольт-амперной характеристики и прямой $U = U_0 - IR$. На графике, представленном ниже, пунктирной линией показана прямая, соответствующая такому значению сопротивления, при котором ток цепи определяется неоднозначно (уравнение имеет три решения). Тонкими сплошными линиями чёрного цвета показаны прямые, соответствующие таким значениям сопротивления R_1 и R_2 , что уравнение имеет два решения.



Легко видеть, что искомые значения сопротивления, при которых ток в цепи определяется однозначно, даются неравенствами

$$R < R_1, \quad R > R_2.$$

Теперь остаётся определить значения R_1 и R_2 . Значение R_1 определяется из уравнения

$$u = 6u - 4i \cdot R_1. \quad (12)$$

Аналогичное уравнение можно записать и для определения значения R_2

$$4u = 6u - i \cdot R_2. \quad (13)$$

Решая уравнения (12) и (13), получаем ответы:

$$R > \frac{2u}{i}, \quad R < \frac{5u}{4i}.$$

Б. Параллельное соединение туннельного диода и резистора может обеспечить постоянный ток в этой цепи (в некотором диапазоне напряжений) в том случае, если вольт-амперная характеристика этого параллельного соединения имеет горизонтальный участок, что реализуется при значении сопротивления балластного резистора, равном

$$R_0 = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} = \frac{600}{9} \text{ Ом} \approx 66,7 \text{ Ом}.$$

Теперь можем легко вычислить постоянное значение тока через нагрузку

$$I_{\text{const}} = I_1 + \frac{U_1}{R_0} = 13 \text{ мА}.$$

Обозначим минимальное входное напряжение $U_{\min} = 3,0$ В, тогда значение тока I_{const} через нагрузку реализуется при следующих значениях сопротивления нагрузки

$$\frac{U_{\min} - U_2}{I_{\text{const}}} \leq R \leq \frac{U_{\min} - U_1}{I_{\text{const}}}, \quad (14)$$

Вычислив значения в формуле (14), и округлив до целого, получим неравенства

$$170 \text{ Ом} \leq R \leq 215 \text{ Ом}. \quad (15)$$

Рассуждая аналогично, можем рассчитать диапазон возможных значений сопротивления нагрузки для максимального входного напряжения $U_{\max} = 3,4$ В. Получится двойное неравенство

$$201 \text{ Ом} \leq R \leq 246 \text{ Ом}. \quad (16)$$

Пересечение отрезков (15) и (16) даёт ответ на вопрос задачи:

$$201 \text{ Ом} \leq R \leq 215 \text{ Ом}.$$

Ответ: **А.** $R > \frac{2u}{i}$, $R < \frac{5u}{4i}$. **Б.** Б1) $R_0 \approx 66,7$ Ом; Б2) $201 \text{ Ом} \leq R \leq 215 \text{ Ом}$.

Критерии

№	Критерий	Балл
4.А.1	Найдено одно из граничных значений $R_{\min} = \frac{2u}{i}$.	0,5
4.А.2	Найдено граничное значение $R_{\max} = \frac{5u}{4i}$.	0,5

№	Критерий	Балл
4.A.3*	Получено верное неравенство $R > \frac{2u}{i}$.	0,5
4.A.4*	Получено верное неравенство $R < \frac{5u}{4i}$.	0,5

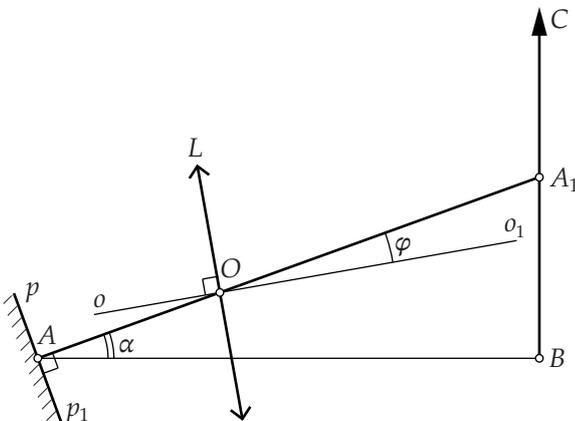
(*) Если выписано нестрогое неравенство вместо строгого, то оценка снижается до 0,3 балла.

№	Критерий	Балл
4.B1.1	Тем или иным образом указывается, что вольт-амперная характеристика параллельного соединения туннельного диода и балластного резистора должна иметь участок с постоянным током.	1,0
4.B1.2	Найдено верное значение сопротивления балластного резистора $R_0 \approx 66,7$ Ом.	1,0
4.B2.1	Предложен метод определения одной из границы диапазона R_{\min} , приводящий в случае аккуратной реализации к верному ответу.	1,0
4.B2.2	Найдено верное значение $R_{\min} \approx 201$ Ом. Значение $R_{\min} \approx 200$ Ом, а также любые другие, из интервала (200 Ом, 201 Ом) также считаются верными.	0,5
4.B2.3	Предложен метод определения границы диапазона R_{\max} , приводящий в случае аккуратной реализации к верному ответу.	1,0
4.B2.4	Найдено верное значение $R_{\max} \approx 215$ Ом.	0,5

5. Tilt-Shift (6 баллов)

Крюков П. А.

Конструкция фотографического Tilt-shift объектива позволяет наклонять и сдвигать оптическую ось объектива относительно линии зрения (линии, соединяющей фотоаппарат и объект съёмки). Наклон оптической оси даёт возможность получать резкие изображения протяжённых предметов, разные точки которых находятся на разном расстоянии от фотоаппарата.



На упрощённой схеме, представленной на рисунке, собирающая линза L символизирует объектив. Главная оптическая ось объектива oo_1 отклонена на угол φ от линии зрения AA_1 , составляющей угол α с горизонталью.

Фотографируемый предмет изображается отрезком BC , pp_1 — плоскость, в которой располагается светочувствительная матрица фотоаппарата (или плёнка, если речь идёт о плёночной камере).

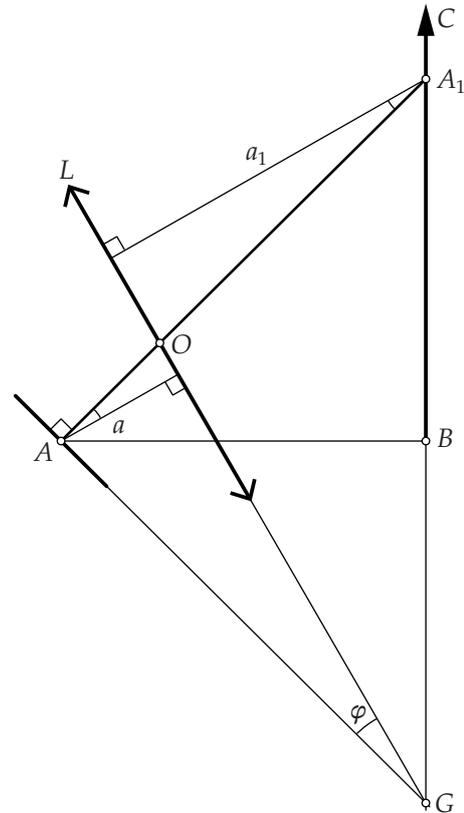
Пусть известны расстояние $AB = 5$ м по горизонтали между матрицей фотоаппарата и предметом, фокусное расстояние объектива $f = 50$ мм, а также угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ между линией зрения и горизонталью. Угол поворота главной оптической оси φ подобран так, чтобы все точки светящегося отрезка BC изображались в плоскости матрицы фотоаппарата pp_1 максимально резко. Найдите угол φ , считая его малым.

Указание. Для малого угла β ($|\beta| \ll 1$) справедливы приближённые соотношения

$$\sin \beta \approx \beta, \quad \operatorname{tg} \beta \approx \beta, \quad \cos \beta \approx 1.$$

Решение

Для того, чтобы изображение предмета получалось наиболее резким необходимо, чтобы прямые, на которых лежат предмет BC , отрезок, символизирующий плоскость плёнки, и линза пересекались в одной точке. В этом случае изображение предмета будет полностью лежать в плоскости плёнки. Обозначим буквой G точку, в которой пересекаются описанные прямые (см. рисунок).



Искомый угол обозначен дугой на рисунке, представленном ниже, a и a_1 — длины перпендикуляров, опущенных из точек A и A_1 на линзу. Длины a и a_1 связаны формулой линзы

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}. \quad (17)$$

При этом, поскольку искомый угол φ мал ($\cos \varphi \approx 1$), справедливы равенства $a \approx AO$ и $a_1 \approx A_1O$, и как следствие, равенство

$$a + a_1 = AA_1 = \frac{L}{\cos \alpha} = L\sqrt{2}, \quad (18)$$

в котором введено обозначение $L = AB$.

Решая уравнения (17) и (18) как систему, отбираем решение, не противоречащее физическому смыслу

$$a = L\sqrt{2} \cdot \frac{1 - 1\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}f}{2L}}}{2} \approx L\sqrt{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}f}{4 \cdot 2L} = f. \quad (19)$$

При записи последней цепочки равенств была использована приближённая формула $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$, справедливая при малых x ($|x| \ll 1$). Поскольку $\angle A_1AB = \frac{\pi}{4}$, отрезки AA_1 и AG равны, при этом $AA_1 = AG = L\sqrt{2}$. Таким образом, как следует из формулы (19), искомый угол равен

$$\varphi \approx \frac{a}{L\sqrt{2}} \approx \frac{f}{L\sqrt{2}} \approx 7,1 \cdot 10^{-3} \approx 0,4^\circ.$$

Ответ: $\varphi = \frac{f}{L\sqrt{2}} \approx 7,1 \cdot 10^{-3} \approx 0,4^\circ$.

Критерии

№	Критерий	Балл
5.1	Указывается (явно или неявно), что вследствие малости искомого угла расстояния a_1 и a до предмета и изображения в формуле линзы равны приближённо: $a = AO$, $a_1 = A_1O$	0,5
5.2	Для расстояния от линзы до светочувствительной матрицы a_1 записано приближённое равенство $a \approx f$. Вывод или доказательство не требуется.	1,5
5.3	Указывается, что изображение будет наиболее резким в том случае, если плоскость изображения совпадает с плоскостью светочувствительной матрицы.	1,0
5.4	Сделан чертёж, из которого следует, что прямые, на которых лежат линза, предмет и изображение, пересекаются в одной точке.	1,5
5.5	Получена верная формула для искомого угла $\varphi \approx \frac{a}{L\sqrt{2}}$ (или аналогичная)	0,5
5.6	Получена верная формула для искомого угла $\varphi = \frac{f}{L\sqrt{2}}$ (или аналогичная)	0,5
5.7	Получен верный числовой ответ $\varphi \approx 7,1 \cdot 10^{-3} \approx 0,4^\circ$.	0,5