Условия задач, авторские решения и критерии оценивания

1. Стержень на плоскости (5 баллов)

Бычков А. И.

Однородный стержень массой m движется по плоскости так, что в некоторый момент времени абсолютные значения ускорений концов A и B стержня оказываются равны $a_A = 2a_0$ и $a_B = a_0$, при этом ускорения направлены вдоль параллельных прямых, а векторы скоростей концов равны друг другу. Какая внешняя сила действует на стержень в данный момент времени? Определите модуль и направление вектора силы.

Решение

Векторы скоростей всех точек твёрдого стержня в рассматриваемый момент времени равны друг другу. Чтобы через малое время Δt проекции скоростей всех точек на направление стержня по-прежнему оставались одинаковыми, проекции ускорений на направление стержня тоже должны быть одинаковыми. Абсолютные значения ускорений концов стержня различны, но при этом ускорения направлены вдоль параллельных прямых, поэтому векторы ускорений могут давать одинаковую проекцию на направление стержня только в том случае, если векторы ускорений перпендикулярны стержню.

Перейдём в инерциальную систему отсчёта, в которой в данный момент времени стержень покоится. Ускорения точек стержня не изменят своего значения и направления. Через бесконечно малый промежуток времени Δt скорости точек стержня будут перпендикулярны стержню и скорость точки A будет вдвое больше скорости точки B. Скорости остальных точек стержня будут пропорциональны расстоянию до мгновенного центра вращения. Пусть на стержне это точка O, тогда ускорения точек в начале интервала времени Δt должны быть тоже пропорциональными расстоянию до точки O стержня. Проведём прямые через начала ускорений $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$ и через их концы. Точка стержня, которая лежит на пересечении этих прямых, имеет нулевое ускорение (точка O). Найдём ускорение центра масс стержня. Если ускорения точек A и B направлены в одну сторону, то ускорение центра масс равно $\frac{3}{2}a_0$ и совпадает с направлением векторов $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$. Если ускорения точек A и B направлены в разные стороны, то ускорение центра масс равно $\frac{1}{2}a_0$ и совпадает с направлением вектора $\vec{a}_A$. Результирующую силу, действующую на стержень, найдём, воспользовавшись теоремой о движении центра масс. В итоге получаем, что на стержень действует либо сила $\frac{3}{2}ma_0$, либо сила $\frac{1}{2}ma_0$. В обоих случаях вектор силы направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}_A$.

Ответ: $\frac{3}{2}ma_0$ или $\frac{1}{2}ma_0$; вектор силы направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}_A$.

Критерии

№	Критерий	Балл
1.1	Доказывается, что векторы ускорений перпендикулярны стержню.	1,0
1.2	Высказывается мысль о том, что ускорения точек стержня пропорциональны расстоянию до точки пересечения линий, проходящих через начала ускорений $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$, и через их концы.	1,0
1.3	Найдено ускорение центра масс для случая, когда ускорения точек A и B направлены в разные стороны $a_{\text{цм}} = \frac{1}{2}a_0$.	1,0
1.4	Найдено ускорение центра масс для случая, когда ускорения точек A и B направлены в одну сторону $a_{\text{цм}} = \frac{3}{2}a_0$.	1,0
1.5	Выписан хотя бы один верный ответ.	1,0

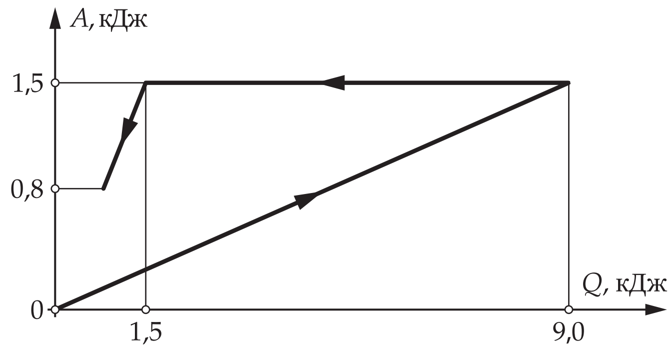
2. Термодинамический цикл (6 баллов)

Бычков А. И.

Состояние одного моля идеального двухатомного газа изменяется в цикле, состоящем из процессов с постоянной теплоёмкостью. На рисунке, представленном ниже, изображён график зависимости работы, совершаемой газом, от количества теплоты, полученного или отданного им при достижении текущего состояния.

А. (*1 балл*) Определите КПД цикла.

Б. (*5 баллов*) Чему равна минимальная температура газа в этом циклическом процессе, если максимальная температура равна 481 К?



Примечание. Квазистатический процесс, при котором молярная теплоёмкость газа c остаётся постоянной, описывается соотношением

$$PV^{\frac{c-c_P}{c-c_V}} = \text{const},$$

где P и V — давление и объём соответственно, c_V и $c_P = c_V + R$ — это молярные теплоёмкости при постоянном объёме и давлении.

Решение

Используя график, находим КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{0,8\,\text{кДж}}{9,0\,\text{кДж}} = 8,9\ \%,$$

где A — работа, совершенная газом за цикл, Q_+ — подведённое к газу количество теплоты.

Найдём теплоёмкость газа в процессе, который описывается уравнением $A = \frac{1}{6}Q$ (прямолинейный участок, проходящий через начало координат). Запишем первое начало термодинамики для процесса с постоянной теплоёмкостью

$$c\Delta T = c_V\Delta T + A,$$

откуда получим следующее соотношение

$$A = (c - c_V)\Delta T = \frac{(c - c_V)}{c}Q.$$

Следовательно $\frac{(c_1 - c_V)}{c_1} = \frac{1}{6}$, откуда имеем равенство

$$c_1 = \frac{6}{5}c_V = 3R.$$

Зная теплоёмкость газа, найдём изменение температуры в этом процессе

$$Q = 3R\Delta T_1 \quad\Rightarrow\quad \Delta T_1 = \frac{9\,\text{кДж}}{3\cdot 8,3\,\text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}} = 361\,\text{К}.$$

Во втором процессе работа газа равна нулю, поэтому для него справедлива формула $Q = c_V\Delta T_2$, из которой следует ответ

$$\Delta T_2 = -\frac{7,5\,\text{кДж}}{\frac{5}{2}\cdot 8,3\,\text{Дж/(моль}\cdot\text{К)}} = -361\,\text{К}.$$

В начале и в конце третьего процесса с постоянной теплоёмкостью температуры газа равны, следовательно, это изотермический процесс.

Минимальная температура газа в цикле равна

$$T_{\min} = T_{\max} + \Delta T_2 = 481\,\text{К} - 361\,\text{К} = 120\,\text{К}.$$

Ответ: А. $\eta = \frac{A}{Q_+} \approx 8,9\ \%$. Б. $T_{\min} = 120\,\text{К}$.

Критерии

№	Критерий	Балл
2.1	Найден КПД цикла.	1,0
2.2	Найдена теплоёмкость газа в процессе, который описывается уравнением $A = \frac{1}{6}Q$ (первый процесс) $c_1 = 3R$.	2,0
2.3	Найдено изменение температуры в первом процессе.	0,5
2.4	Найдена теплоёмкость газа в процессе, который описывается уравнением $A = 1,5$ кДж (второй процесс): $c_2 = c_V$.	0,5
2.5	Найдено изменение температуры во втором процессе.	0,5
2.6	Указано, что третий процесс является изотермическим.	0,5
2.7	Найдена минимальная температура за цикл $T_{\min} = 120$ К.	1,0

3. Мартышка тянет удава (8 баллов)
Варламов С. Д.

Удав выпрямился, лежа на горизонтальной поверхности, расслабился и не сопротивляется совсем. Его масса M равномерно распределена по его длине L. Поверхность гладкая, и по ней рядом с удавом и параллельно ему проложена тропинка (не гладкая) для прогулок. Мартышка, находясь на этой тропинке, схватила удава за кончик его хвоста и потащила этот конец удава в направлении к его голове. При этом удав целиком лежит на поверхности. Сила F, с которой мартышка тянет хвост удава, горизонтальна и меняется в зависимости от временем t по закону $F = At$, где A — это известная постоянная величина.

А. (*4 балла*) С какой скоростью двигался кончик хвоста удава в тот момент, когда расстояние от него до головы удава впервые стало равно $\frac{L}{2}$?

Б. (*2 балла*) Через какое время хвост удава поравняется с неподвижной головой удава?

В. (*2 балла*) Какой будет скорость всего удава в тот момент, когда его голова придёт в движение?

Указание. Может оказаться полезной формула

$$\int\limits_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right), \quad n \neq -1.$$

Решение

К некоторому моменту времени кончик хвоста удава переместился на расстояние X. В этот момент импульс удава (той его части, которая уже пришла в движение) равен

$$P = \frac{M}{L}\cdot\frac{X}{2}\cdot\frac{dX}{dt} = \frac{M}{4L}\cdot\frac{d(X^2)}{dt}$$

Скорость изменения импульса равна силе

$$\frac{dP}{dt} = \frac{M}{4L}\cdot\frac{d\left[\frac{d(X^2)}{dt}\right]}{dt} = At$$

Интегрируем уравнение два раза по времени, и получаем соотношение

$$\frac{X^2M}{4L} = \frac{At^3}{6} + C_1t + C_2$$

Здесь C_1 — константа, связанная со скоростью кончика хвоста в начальный момент, а C_2 — это константа, зависящая от начальной координаты кончика хвоста. В начальный момент времени и скорость V_0, и смещение X_0 кончика хвоста удава равны нулю. Отсюда следует, что $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, поэтому справедлива формула

$$\frac{X^2M}{4L} = \frac{At^3}{6}. \tag{1}$$

Смещение X связано со временем t так:

$$X(t)=\sqrt{\frac{2AL}{3M}}\cdot t^{3/2}.$$

А скорость кончика хвоста так:

$$\frac{dX}{dt}=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{2AL}{3M}}\cdot t^{1/2}\quad\text{или}\quad\frac{dX}{dt}=\sqrt{\frac{3AL}{2M}}\cdot t^{1/2}.\qquad(2)$$

Для ответа на первый вопрос нужно найти время, когда $X=\frac{L}{2}$. Подставляем это значение X в формулу (1) и получаем

$$t=\left(\frac{3ML}{8A}\right)^{1/3}$$

Подставим найденное значение времени в формулу для скорости (2), имеем

$$\frac{dX}{dt}=\sqrt{\frac{3AL}{2M}}\cdot\left(\frac{3ML}{8A}\right)^{1/6}\quad\text{или}\quad\frac{dX}{dt}=\left(\frac{9AL^2}{8M}\right)^{1/3}$$

Для ответа на второй вопрос, нужно в формулу (1) подставить значение $X=L$:

$$t_{(L)}=\left(\frac{3LM}{2A}\right)^{1/3}$$

Для ответа на третий вопрос, нужно в формулу (1) подставить значение $X=2L$, и получить значение времени, а затем полученное значение времени подставить в формулу (2). Сначала получится соотношение

$$t_{(2L)}=\left(\frac{6LM}{A}\right)^{1/3},$$

а затем ответ:

$$\frac{dX}{dt}=\sqrt{\frac{3AL}{2M}}\cdot\left(\frac{6LM}{A}\right)^{1/6}\quad\text{или}\quad\frac{dX}{dt}=\left(\frac{9AL^2}{2M}\right)^{1/3}$$

Ответ: А. $\frac{dX}{dt}=\left(\frac{9AL^2}{8M}\right)^{\frac{1}{3}}$. Б. $t_{(L)}=\left(\frac{3LM}{2A}\right)^{1/3}$. В. $\frac{dX}{dt}=\left(\frac{9AL^2}{2M}\right)^{1/3}$.

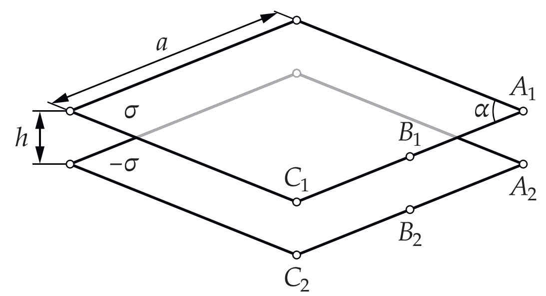
Критерии

За правильный ответ на первый вопрос задачи 4 балла. За правильные ответы на второй и на третий вопросы по 2 балла. В сумме 8 баллов за полное и правильное решение.

№	Критерий	Балл
3.А.1	Написано выражение для импульса P удава в момент времени, когда кончик хвоста переместился на расстояние X.	0,5
3.А.2	Записан 2-й закон Ньютона в виде $\frac{dP}{dt}=F$.	0,5
3.А.3	Уравнение для скорости изменения импульса (2-й закон Ньютона) дважды проинтегрировано и получена связь между временем и перемещением кончика хвоста удава с константами C_1 и C_2.	0,5
3.А.4	Указано, что константы C_1 и C_2, возникшие при двукратном интегрировании в соответствии с условием задачи, равны нулю, и написана формула связи X и t, в которой величина X^2 пропорциональна t^3.	0,5
3.А.5	Получена формула для величины перемещения кончика хвоста от времени, прошедшего с момента начала движения.	0,5
3.А.6	Получена формула для скорости кончика хвоста от времени, прошедшего с момента начала движения.	0,5
3.А.7	Получена величина промежутка времени между началом движения и моментом t, когда кончик хвоста переместился на расстояние $\frac{L}{2}$ (для ответа на первый вопрос задачи).	0,5
3.А.8	Получено выражение для скорости движения кончика хвоста в найденный (пункт 3.А.7) момент времени.	0,5
3.Б.1	Найден промежуток времени между началом движения и моментом, когда кончик хвоста поравнялся с головой удава.	2,0
3.В.1	Найден промежуток времени между началом движения и моментом, когда голова удава начала двигаться.	1,0
3.В.2	Найдена скорость удава в момент времени (найденный в пункте 3.В.1).	1,0

4. Разности (6 баллов)
Крюков П. А.

Две одинаковые плоские диэлектрические пластины, заряженные равномерно по поверхности с плотностью σ и $-\sigma$, располагаются параллельно друг другу на небольшом расстоянии h (см. рисунок). Каждая пластина имеет форму ромба с острым углом α $\left(\frac{\pi}{6}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$ и длиной стороны a ($a\gg h$). Любая вершина верхней пластины и ближайшая к ней вершина нижней пластины лежат на общем перпендикуляре к плоскостям пластин.



А. (*1 балл*) Найдите разность потенциалов центров пластин. Центром ромба считается точка пересечения его диагоналей.

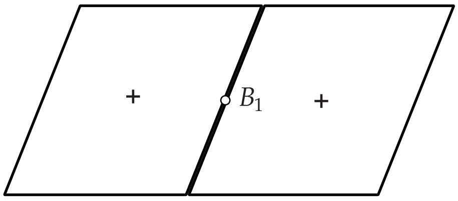
Б. (*2 балла*) Определите разность потенциалов серединблизлежащих сторон пластин (точки B_1 и B_2).

В. (*3 балла*) Чему равна разность потенциалов вершин ромбов A_1 и A_2? А разность потенциалов вершин C_1 и C_2?

Решение

А. Внутри конденсатора, вдали от его краёв поле можно считать однородным и равным $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Разность потенциалов центров пластин равна $\Delta\varphi_0 = \frac{\sigma h}{\varepsilon_0}$.

Б. Вблизи края конденсатора электрическое поле искривляется. Вертикальная составляющая напряжённости поля вблизи края конденсатора может быть найдена на основе соображений симметрии. Обозначим $E_B^{(\perp)}$ составляющую напряжённости электрического поля вблизи точки B, перпендикулярную пластинам конденсатора. Совместим два одинаковых конденсатора, так чтобы совпадали их края (см. рисунок, вид сверху).



Напряжённость поля вблизи точки B_1 внутри составного конденсатора будет равна $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. С другой стороны, эта напряжённость равна $2E_B^{(\perp)}$, поэтому $E_B^{(\perp)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, а искомая разность потенциалов равна $\Delta\varphi^{(B)} = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}$.

В. Рассмотрим конденсаторы, обкладки которых представляют собой ромбы с малым углом при вершине. Пусть для примера этот угол равен 1°. Совместим острыми углами 360 таких конденсаторов. Тогда на основе соображений симметрии, рассуждая аналогично предыдущему пункту, можно найти перпендикулярную обкладкам составляющую напряжённости электрического поля внутри конденсатора вблизи угла, получится значение $E^{(\perp)} = \frac{\sigma}{360\varepsilon_0}$. Отсюда следует, что для конденсатора с обкладками в виде ромбов с углом φ перпендикулярная обкладкам составляющая напряжённости электрического поля равна

$$E_C^{(\perp)} = \frac{\sigma\varphi}{2\pi\varepsilon_0}, \qquad (3)$$

где угол φ измеряется в радианах. На основании формулы (3) легко находим искомые разности потенциалов:

$$\Delta\varphi^{(A)} = \frac{\sigma\alpha h}{2\pi\varepsilon_0}, \qquad \Delta\varphi^{(C)} = \frac{\sigma(\pi-\alpha)h}{2\pi\varepsilon_0}.$$

<u>Ответ</u>: А. $\Delta\varphi_0 = \frac{\sigma h}{\varepsilon_0}$. Б. $\Delta\varphi^{(B)} = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}$. В. $\Delta\varphi^{(A)} = \frac{\sigma\alpha h}{2\pi\varepsilon_0}$, $\Delta\varphi^{(C)} = \frac{\sigma(\pi-\alpha)h}{2\pi\varepsilon_0}$.

Критерии

№	Критерий	Балл
4.А.1	Получено верное значение разности потенциалов $\Delta\varphi_0 = \frac{\sigma h}{\varepsilon_0}$.	1,0
4.Б.1	Найдено верное значение разности потенциалов $\Delta\varphi^{(B)} = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}$.	2,0
4.В.1	Найдено верное значение разности потенциалов точек A_1 и A_2 $\Delta\varphi^{(A)} = \frac{\sigma\alpha h}{2\pi\varepsilon_0}$.	1,5
4.В.2	Найдено верное значение разности потенциалов точек C_1 и C_2 $\Delta\varphi^{(C)} = \frac{\sigma(\pi-\alpha)h}{2\pi\varepsilon_0}$.	1,5

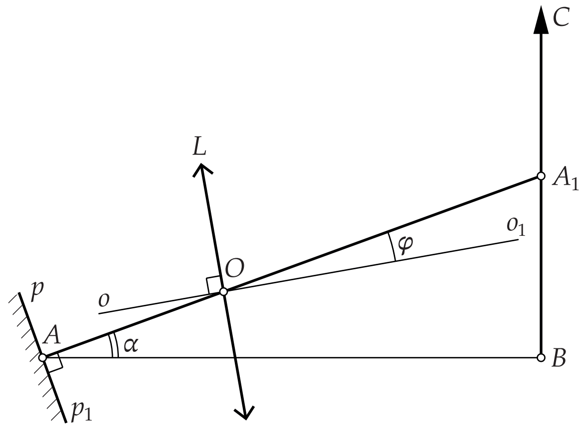
Если найденные значения отличаются от приведённых выше только знаком, то они всё равно считаются верными.

5. Tilt-Shift (6 баллов)

Крюков П. А.

Конструкция фотографического Tilt-shift объектива позволяет наклонять и сдвигать оптическую ось объектива относительно линии зрения (линии, соединяющий фотоаппарат и объект съёмки). Наклон оптической оси даёт возможность получать резкие изображения протяжённых предметов, разные точки которых находятся на разном расстоянии от фотоаппарата.

На упрощённой схеме, представленной на рисунке, собирающая линза L символизирует объектив. Главная оптическая ось объектива oo_1 отклонена на угол φ от линии зрения AA_1, составляющей угол α с горизонталью. Фотографируемый предмет изображается отрезком BC, pp_1 — плоскость, в которой располагается светочувствительная матрица фотоаппарата (или плёнка, если речь идёт о плёночной камере).



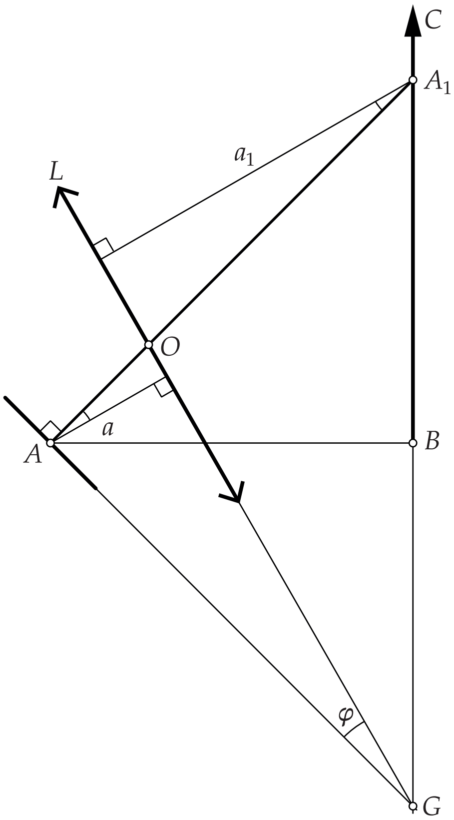
Пусть известны расстояние $AB = 5$ м по горизонтали между матрицей фотоаппарата и предметом, фокусное расстояние объектива $f = 50$ мм, а также угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ между линией зрения и горизонталью. Угол поворота главной оптической оси φ подобран так, чтобы все точки светящегося отрезка BC изображались в плоскости матрицы фотоаппарата pp_1 максимально резко. Найдите угол φ, считая его малым.

Указание. Для малого угла β ($|\beta| \ll 1$) справедливы приближённые соотношения

$$\sin\beta \approx \beta, \qquad \operatorname{tg}\beta \approx \beta, \qquad \cos\beta \approx 1.$$

Решение

Для того, чтобы изображение предмета получалось наиболее резким необходимо, чтобы прямые, на которых лежат предмет BC, отрезок, символизирующий плоскость плёнки, и линза пересекались в одной точке. В этом случае изображение предмета будет полностью лежать в плоскости плёнки. Обозначим буквой G точку, в которой пересекаются описанные прямые (см. рисунок). Искомый угол обозначен дугой на рисунке, представленном ниже, a и a_1 — длины перпендикуляров, опущенных из точек A и A_1 на линзу.



Длины a и a_1 связаны формулой линзы

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}. \tag{4}$$

При этом, поскольку искомый угол φ мал ($\cos\varphi \approx 1$), справедливы равенства $a \approx AO$ и $a_1 \approx A_1O$, и как следствие, равенство

$$a + a_1 = AA_1 = \frac{L}{\cos\alpha} = L\sqrt{2}, \tag{5}$$

в котором введено обозначение $L = AB$.

Решая уравнения (4) и (5) как систему, отбираем решение, не противоречащее физическому смыслу

$$a = L\sqrt{2}\cdot\frac{1 - 1\sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}f}{2L}}}{2} \approx L\sqrt{2}\cdot\frac{4\sqrt{2}f}{4\cdot 2L} = f. \tag{6}$$

При записи последней цепочки равенств была использована приближённая формула $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$, справедливая при малых x ($|x| \ll 1$). Поскольку $\angle A_1AB = \frac{\pi}{4}$, отрезки AA_1 и AG равны, при этом $AA_1 = AG = L\sqrt{2}$. Таким образом, как следует из формулы (6), искомый угол равен

$$\varphi \approx \frac{a}{L\sqrt{2}} \approx \frac{f}{L\sqrt{2}} \approx 7{,}1\cdot 10^{-3} \approx 0{,}4^\circ.$$

Ответ: $\varphi = \frac{f}{L\sqrt{2}} \approx 7{,}1\cdot 10^{-3} \approx 0{,}4^\circ$.

Критерии

№	Критерий	Балл
5.1	Указывается (явно или неявно), что вследствие малости искомого угла расстояния a_1 и a до предмета и изображения в формуле линзы равны приближённо: $a = AO$, $a_1 = A_1O$	0,5
5.2	Для расстояния от линзы до светочувствительной матрицы a_1 записано приближённое равенство $a \approx f$. Вывод или доказательство не требуется.	1,5
5.3	Указывается, что изображение будет наиболее резким в том случае, если плоскость изображения совпадает с плоскостью светочувствительной матрицы.	1,0
5.4	Сделан чертёж, из которого следует, что прямые, на которых лежат линза, предмет и изображение, пересекаются в одной точке.	1,5
5.5	Получена верная формула для искомого угла $\varphi \approx \frac{a}{L\sqrt{2}}$ (или аналогичная)	0,5
5.6	Получена верная формула для искомого угла $\varphi = \frac{f}{L\sqrt{2}}$ (или аналогичная)	0,5
5.7	Получен верный числовой ответ $\varphi \approx 7{,}1\cdot 10^{-3} \approx 0{,}4^\circ$.	0,5