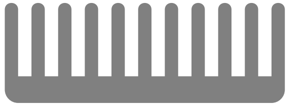
6 класс

Задача 1. У Кати и Маши расчёски одинаковой длины. У каждой расчёски все зубчики одинаковые, а расстояния между зубчиками равны ширине зубчика. В Катиной расчёске 11 зубчиков (см. рис.). Сколько зубчиков в Машиной расчёске, если они в пять раз у́же зубчиков Катиной расчёски? [*5 баллов*] (*Т. Казицына*)

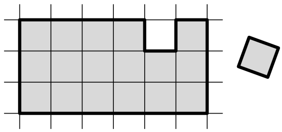


Ответ. 53.

Решение. Наложим Катину расчёску на Машину так, чтобы края совместились. Один зубчик Катиной расчёски закроет три зубчика Машиной и два промежутка между ними. В один просвет между Катиными зубчиками попадёт три Машиных промежутка и два зубчика. Всего на Катиной расчёске 11 зубчиков и 10 промежутков, что соответствует $11 \cdot 3 + 10 \cdot 2 = 53$ зубчикам Машиной расчёски.

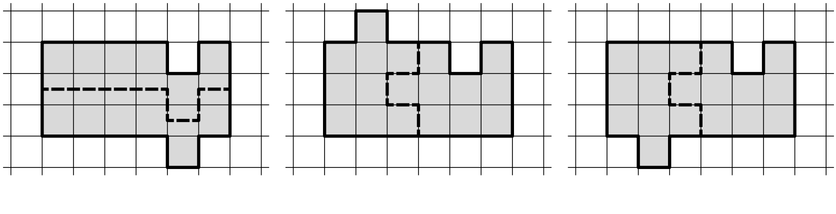
Можно рассуждать по-другому. В Катиной расчёске 11 зубчиков и 10 промежутков между ними. Всего $11 + 10 = 21$ одинаковых отрезков. В Машиной расчёске таких отрезков $21 \cdot 5 = 105$. Из них зубчиков на один больше, чем промежутков. То есть зубчиков 53, а промежутков 52.

Задача 2. Из прямоугольника 3×6 вырезали одну клетку (см. рис.). «Пришейте» эту клетку в другом месте так, чтобы получилась фигура, которую можно разрезать на две одинаковых.



[*5 баллов*] (*Т. Казицына*)

Ответ. Несколько примеров пришивания и разрезания см. на рисунках.



Комментарий. Части одинаковые, а значит, можно одну из частей переместить как единое целое, чтобы она наложилась на другую. В первом примере для этого надо её сдвинуть параллельно самой себе, во втором повернуть вокруг некоторой точки, а в третьем сначала сдвинуть, а потом перевернуть на другую сторону. Эти перемещения называют движениями плоскости — они не меняют расстояния между точками фигуры, и поэтому фигура сохраняет свою форму и размеры. Движения, которые мы видим в этих примерах, называются соответственно параллельным переносом, поворотом и скользящей симметрией. Теорема Ша́ля гласит, что всякое движение плоскости относится к одному из трёх данных типов. Мишель Шаль — известный французский геометр XIX века.

Задача 3. В сумме

$$\text{П,Я} + \text{Т,Ь} + \text{Д,Р} + \text{О,Б} + \text{Е,Й}$$

все цифры зашифрованы буквами (разными буквами — разные цифры). Оказалось, что все пять слагаемых не целые, но сама сумма является целым числом. Каким именно?

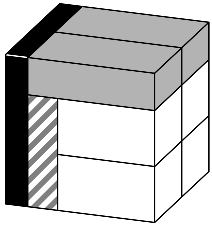
Для каждого возможного ответа напишите один пример с такими пятью слагаемыми. Объясните, почему другие суммы получить нельзя. **[*7 баллов*]** (*А. Шаповалов*)

Ответ. 27 (пример $0{,}5 + 1{,}6 + 7{,}4 + 8{,}3 + 9{,}2 = 27$) и 18 (пример $0{,}9 + 1{,}8 + 3{,}7 + 5{,}4 + 6{,}2 = 18$).

Решение. Сумма Я + Ь + Р + Б + Й должна оканчиваться нулём. Сумму 10 получить можно, только если взять пять наименьших цифр ($0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$), но такой пример не получится составить, так как ноль не может стоять после запятой (тогда дробь будет целым числом вопреки условию). Максимальная сумма пяти цифр $9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$, так что получить можно только суммы 20 и 30.

Заметим, что все буквы различны, то есть все десять цифр участвуют в записи по одному разу. Общая сумма всех десяти цифр равна 45. Поэтому если сумма цифр после запятой равна 20, то при суммировании после запятой мы получим 0, а в предыдущий разряд перенесем 2. Эта 2 добавится к сумме цифр до запятой, которая равна $45 - 20 = 25$, и мы находим ответ 27. Аналогично, если сумма цифр после запятой равна 30, то ответ будет равен $45-30+3=18$.

Комментарий. Примеров в этой задаче очень много – есть 86400 способов получить сумму 27 и 72000 способов получить сумму 18.



Задача 4. Миша сложил из восьми брусков куб (см. рис.). Все бруски имеют один и тот же объём, серые бруски одинаковые и белые бруски тоже одинаковые. Какую часть ребра куба составляют длина, ширина и высота белого бруска?

[*7 баллов*] (*М. Евдокимов*)

Ответ. $\frac{7}{10}$, $\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{14}$.

Решение. Будем считать, что ребро куба равно 1, тогда его объём тоже 1, а объём каждого из восьми брусков равен $\frac{1}{8}$.

Очевидно, что ширина серого и белого брусков равна $\frac{1}{2}$.

Два измерения чёрного бруска равны по 1, значит, третье равно $\frac{1}{8}$. То есть длина серого бруска

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}.$$

Теперь мы можем найти высоту серого бруска, разделив объём на произведение длины и ширины:

$$\frac{1}{8}:\left(\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{7}.$$

Оставшаяся часть высоты куба — удвоенная высота белого бруска, значит, высота белого бруска равна

$$\left(1-\frac{2}{7}\right):2=\frac{5}{14}.$$

Теперь найдём длину белого бруска тем же приёмом, что и высоту серого:

$$\frac{1}{8}:\left(\frac{5}{14}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{10}.$$

Задача 5. Решил шах проверить придворного мудреца. «Вот тебе шесть шкатулок, — сказал шах, — с надписями 1, 2, 3, 4, 5, 6 на крышках. В каждой шкатулке золотая монета, которая весит ровно столько граммов, сколько написано. Ты расставляешь шкатулки как угодно в клетках прямоугольника 2×3. Потом я втайне от тебя меняю местами монеты в каких-то двух шкатулках, стоящих в соседних по стороне клетках (или ничего не меняю). Затем ты укажешь на несколько шкатулок, а я назову тебе общий вес монет в них. Если после этого правильно определишь, какие монеты я переложил, останешься при дворе. А не сможешь — прогоню вон!»

Как может действовать мудрец, чтобы выдержать испытание? **[*8 баллов*]** (*А. Шаповалов*)

Решение. Мудрец может расположить шкатулки, например, так:

4	5	1
2	6	3

И указать шаху те шкатулки, где на крышках массы 2, 3 и 5. Если шах назовёт сумму 10, значит, он ничего не менял. Если он менял местами какие-то монеты, сумма всякий раз будет другой:

Что менял шах	Сумма
ничего	10
4 и 2	12
5 и 6	11
1 и 3	8
4 и 5	9
2 и 6	14
5 и 1	6
6 и 3	13

Как видим, все суммы разные, так что по сумме мудрец сможет понять, менялись ли монеты и какие, и назвать их правильно.

Комментарий. Как мог рассуждать мудрец, придумывая пример? Раскрасим прямоугольник 2×3 в шахматном порядке. Ясно, что надо назвать либо три белые клетки, либо три чёрные — в противном случае среди названных (или не названных) будут две соседние, и мудрец не сможет определить, поменял в них шах монеты или нет. Возможные суммы в трёх шкатулках меняются в диапазоне от 6 до 15, причём сумма от замены монет может увеличиться или уменьшиться на 1, 2, 3, 4 или 5. Чтобы восемь сумм (исходная и при любом из семи обменов) были различны, исходная сумма должна быть примерно в середине ряда (равняться 10 или 11). Дальше можно действовать подбором.

Задача 6. В школе все ученики — отличники, хорошисты либо троечники. В круг встали 99 учеников. У каждого среди трёх соседей слева есть хотя бы один троечник, среди пяти соседей справа — хотя бы один отличник, а среди четырёх соседей — двух слева и двух справа — хотя бы один хорошист. Может ли в этом круге быть поровну отличников и троечников? **[*8 баллов*]**

(*А. Шаповалов*)

Ответ. Не может.

Решение. Заметим, что первые два условия можно проще сформулировать так: среди любых трёх стоящих подряд есть троечник, среди любых пяти стоящих подряд есть отличник. Кроме того, рядом с каждым хорошистом или через одного человека от него должен стоять другой хорошист (назовем таких двух хорошистов друзьями). Если два друга-хорошиста стоят рядом, то с обеих сторон от них должны стоять троечники, а если через одного, то троечник стоит между ними. Поэтому, если у какого-то хорошиста есть два друга, то возникает одна из двух пятёрок — 34434 или 43434, в которых нет отличника, что невозможно. Таким образом, хорошисты распадаются на пары друзей, и поэтому хорошистов чётное число. А тогда отличников и троечников вместе — нечётное, значит, их не поровну.