

Задача 1. У математика есть 19 различных гирь, массы которых в килограммах равны $\ln 2, \ln 3, \ln 4, \dots, \ln 20$, и абсолютно точные двухчашечные весы. Он положил несколько гирь на весы так, что установилось равновесие. Какое наибольшее число гирь могло оказаться на весах?

Задача 2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH . Точки M и N — середины отрезков BH и CH . Докажите, что точка пересечения перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямые AB и AC соответственно, равноудалена от точек B и C .

Задача 3. Имеется кучка из 100 камней. Двое играют в следующую игру. Первый игрок забирает 1 камень, потом второй может забрать 1 или 2 камня, потом первый может забрать 1, 2 или 3 камня, затем второй 1, 2, 3 или 4 камня, и так далее. Выигрывает тот, кто забирает последний камень. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

Задача 4. Дан многочлен степени $n \geq 1$ с целыми ненулевыми коэффициентами, каждый из которых является его корнем. Докажите, что модули всех коэффициентов этого многочлена не превосходят 2.

Задача 5. В тетраэдре $ABCD$ скрещивающиеся рёбра попарно равны. Через середину отрезка AH_A , где H_A — точка пересечения высот грани BCD , провели прямую h_A перпендикулярно плоскости BCD . Аналогичным образом определили точки H_B, H_C, H_D и построили прямые h_B, h_C, h_D соответственно для трёх других граней тетраэдра. Докажите, что прямые h_A, h_B, h_C, h_D пересекаются в одной точке.

Задача 6. Кощей придумал для Ивана-дурака испытание. Он дал Ивану волшебную дудочку, на которой можно играть только две ноты — до и си. Для прохождения испытания Ивану нужно сыграть какую-нибудь мелодию из 300 нот на свой выбор. Но до того, как он начнёт играть, Кощей выбирает и объявляет запретными одну мелодию из пяти нот, одну — из шести нот, ..., одну — из 30 нот. Если в какой-то момент последние сыгранные ноты образуют одну из запретных мелодий, дудочка перестает звучать. Сможет ли Иван пройти испытание, какие бы мелодии Кощей ни объявил запретными?

XXI устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 14 апреля.
Подробности — на странице olympiads.mcsme.ru/ustn/

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXVII Московской математической олимпиады —
на сайте mmo.mcsme.ru