XVI олимпиада МЦНМО по теории вероятностей и статистике

правила и регламент основного тура 17 декабря 2022 г.— 21 января 2023 г.

1. Участие в основном туре

Дорогие участники олимпиады, родители и учителя. В целях популяризации математики и, в особенности, теории вероятностей и статистики – разделов математики, наиболее близких к жизни, мы с 2008 г. проводим эту заочную олимпиаду. Основной тур содержит 19 заданий, из которых 3 задания – эссе (небольшое сочинение на заданную тему) и 16 задач, которые требуют полного решения.

Участвовать в основном туре может любой школьник, студент ССУЗа, колледжа или лицея, независимо от участия, неучастия или результатов пригласительного тура.

Участие индивидуальное и только индивидуальное. Участие команд, в том числе школьных, не подразумевается.

ВНИМАНИЕ!

Каждую задачу мы рекомендуем участникам, начиная с некоторого класса. Это указание – ориентир; оно не является ограничением. Вы можете выполнять любое задание независимо от возраста и наших рекомендаций. Баллы начисляются в соответствии с критериями независимо от класса. Разница в возрасте учитывается при награждении и определении призеров и победителей.

2. Рассылка материалов

Все участники самостоятельно получают анкету и файл с правилами и заданиями на странице основного тура http://ptlab.mccme.ru/node/1702. Анкета находится в том же архиве, в котором находится файл, который Вы сейчас читаете.

3. Выполнение работы

В ходе раздумий над заданиями вы можете пользоваться любыми источниками (справочниками, учебниками, интернетом, получать консультации от учителя, от нас) по поводу теории вероятностей и статистики. Большую помощь может оказать изучение решений задач прошлых лет (см. архив на странице основного тура), посещение дистанционного кружка по теории вероятностей (http://ptlab.mccme.ru/node/1483). Неэтичным и попросту недопустимым является лишь прямое списывание или выполнение заданий за участника кем-то другим. Для консультаций с нами используйте, пожалуйста, форум «Консультация» на нашем сайте http://ptlab.mccme.ru. У вас больше месяца. Пожалуйста, не откладывайте все на последний день, но и не спешите.

4. Отсылка решений, проверка и оценивание

Свои решения и *заполненную анкету участника* вам нужно отправить *в одном письме* в любом текстовом или графическом формате (doc, docx, pdf, png, jpg и т. п., но не heic) на электронный адрес prob-in-school@yandex.ru до истечения суток 21 января 2023 года по московскому времени. Ответы и решения, высланные 22 января или позже, не принимаются. Ваши решения проверит оргкомитет. Мы планируем закончить проверку и разослать участникам результаты до 28 января включительно. При большом количестве участников срок проверки может быть увеличен.

ВНИМАНИЕ!

Пожалуйста, пришлите анкету участника и решение именно в одном письме, а не в разных. Если к решению не приложена анкета, нам иногда трудно установить авторство.

Решения задач будут опубликованы на странице основного тура 22 января. Лучшие эссе будут опубликованы чуть позже после проверки.

5. Определение призеров и победителей, награждение

При проверке задания оцениваются разным числом баллов в зависимости от их сложности (максимальный балл за задачу указан в условии). Единственное требование, предъявляемое к решению задачи – решение должно быть математически верным.

Отдельно происходит определение призеров и победителей в 6–7 классах (и младше при наличии), отдельно в 8–9 классах и отдельно – в 10–11.

В конкурсе задач баллы за задачи суммируются и определяются победители.

Баллы за эссе не суммируются – определяются авторы лучших эссе.

Критерии награждения оргкомитет публикует после олимпиады, исходя из ее результатов. Претензии по критериям награждения не принимаются.

Победители и призеры получают дипломы, грамоты и призы от МЦНМО.

6. Апелляция

Апелляция по основному туру проводится по электронной почте с 28 января по 11 февраля 2023 г. включительно. Срок может быть сдвинут, если участников будет много. Форма апелляции будет размещена на странице основного тура. *Оргкомитет прекратит переписку по поводу апелляций после 11 февраля,* независимо от того, все ли вопросы выяснены. При наличии разногласий просим уложиться в срок.

Искренне желаем удачи

Отдельное замечание

Мы редко сталкиваемся со случаями списывания и другими недобросовестными попытками искажения результатов. Но все же бывает. Если у оргкомитета возникают сомнения в самостоятельности выполнения работы, оргкомитет вправе дисквалифицировать работу.

Оргкомитет олимпиады: И. Р. Высоцкий, А. К. Демченкова, Д. Б. Житницкий, Н. И. Сошитова, Н. А. Шихова, И. В. Ященко.

Авторы задач основного тура: И. Р. Высоцкий, Д. Б. Житницкий, Н. И. Сошитова, Катя Сошитова, В. И. Франк, Б. Р. Френкин, Н. А. Шихова.

Художник Н.Крутиков.

Эссе

Эссе – это сочинение небольшого объема на заданную тему. В отличие от задач, эссе не подразумевает точных решений, ответов или методов, но должно быть продуманным, аргументированным, подробным.

Вы можете выбрать любую тему, или две, или все три. Эссе оцениваются отдельно. Баллы за эссе не суммируются и не прибавляются к баллам, полученным за решение задач. Авторы лучших эссе награждаются отдельными дипломами.

1. К парадоксу дней рождения. Как известно, в одном классе с достаточно большой вероятностью найдутся два ученика, у которых совпадают дни рождения. Это явление почему-то называют парадоксом дней рождения[1], хотя никакого парадокса здесь нет.

Если предположить, что в классе нет близнецов и что день рождения случайно выбранного ученика равномерно распределен по всем дням года (будем считать, что их 365, исключая для простоты високосные годы), то вероятность события «*дни рождения не совпадают ни у кого из 23 учеников класса*» равна

$$\underbrace{\frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{343}{365}}_{23\ \text{множителя}}=0,49270\ldots,$$

что меньше, чем 0,5, а потому вероятность противоположного события «*найдутся двое, родившихся в один день года*» имеет вероятность больше, чем 0,5. Чем больше класс, тем выше вероятность этого события. Для 30 человек она достигает 0,706. Однако некоторые люди испытывают обоснованные сомнения на сей счет. Вот выдержка из одной статьи.

«*Сделанный расчет основан на предположении, что день рождения случайно выбранного человека приходится, скажем, на 1 октября с теми же шансами, с какими на 10 января. Иными словами, на предположении, что* $p_i=\frac{1}{365}$ *для* $i=1,\ldots,365$*, где* p_i *– это вероятность того, что случайно выбранный человек имеет день рождения в i-й день года. Но семьи часто планируют рождение детей, поэтому предположение о равновозможности дней рождения сомнительно. Таким образом, вероятность совпадения в группе из* 30 *человек может быть не* 0,706*. Может ли она быть меньше?*»

Мы не хотим сейчас говорить, кто авторы этой статьи, и к каким выводам они пришли. Мы обязательно сделаем это позже при разборе заданий олимпиады. Сейчас мы предлагаем вам поразмыслить над тем, влияет ли неравномерность распределения дней рождений на вероятность совпадения, и если да, то как.

[1] Парадокс дней рождения. См., например, https://ru.wikipedia.org/wiki/Парадокс_дней_рождения или https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/434982/Paradoks_dney_rozhdeniya.

2. Случайность в архитектуре. Случайность в живописи давно заняла если не почетное, то заметное место. Есть даже целое направление – *дриппинг* (англ. Drip[2] Painting), последователи которого наносят краску на полотно самыми причудливыми способами. Можно спорить, является это искусством или просто мазней, но это не наша тема.

Джексон Поллок. Абстракция.

Наша тема другая. На фото внизу слева (рис. 1) одно из зданий делового центра «Санкт-Петербург» в Астане. Можно ли считать случайным расположение синих и золотистых светоотражающих панелей? Например, случайна ли последовательность панелей на каждом этаже? Или дизайнеры придерживались какой-то схемы?

Фото посередине – тоже из Астаны: торец жилого дома выложен разноцветными панелями, кажется, случайно. Или нет?

Третья фотография – ближайшее Подмосковье. Есть ли система в цветовой схеме фасада этого здания?

Рис. 1. Случайный дизайн в архитектуре

Мы поставим вопрос шире – какова роль случайности в современной архитектуре? Часто ли она встречается и служит ли она какой-нибудь определенной цели? Можно ли в этих или других примерах хаотичного дизайна найти закономерности и как эти закономерности получаются – это замысел архитектора или следствие каких-либо математических законов, которым вынужденно подчиняется случайность?

Может быть, вам тоже встречались случайные орнаменты, хаотичное расположение элементов в архитектурных сооружениях, предметах интерьера, садовом или парковом дизайне. Опишите их, сделайте фото, подумайте над тем, имеет ли случайность какой-либо функциональный смысл, удачны или неудачны эти дизайнерские решения. Может быть, вам удастся сформулировать какие-нибудь общие идеи по этому поводу.

В общем, мы предлагаем написать сочинение на тему «Случайность в архитектуре и дизайне», при этом не ограничиваем ваше перо кругом сформулированных вопросов, а, напротив, призываем к свободному полету фантазии.

[2] Английское существительное *drip* имеет несколько переводов на русский язык. Например, капанье. Другой перевод – глупец, тупица.

3. Сложный выбор. В книге Росса Хонсбергера[3] «Математические сливы» (Mathematical Plums) есть не слишком очень приятный сюжет об эпидемии. Сюжет противоречив, поскольку основан на том, что во время некоторой абстрактной эпидемии испытания вакцины проводятся на экстремально малых группах заболевших. Это странно – какая же это эпидемия, если заболевших так мало?

Мы сформулируем задачу иначе. Предположим, имеется очень опасное и *очень редкое* заболевание, от которого без медицинской помощи умирает 50% заболевших.

Изобретены два несовместимых лекарства — A и B, которые прошли испытания на двух группах заболевших, но группы очень малочисленные, поскольку, повторим, заболевание крайне редкое.

В первой группе было всего три пациента. Все они принимали лекарство A и все трое выздоровели. Во второй группе было восемь заболевших. Все они принимали лекарство B, и из них выздоровели семеро.

Только что анализ показал, что вы заразились этой самой болезнью. Какое лекарство вы бы предпочли? Разумеется, принимать сразу оба нельзя, поскольку лекарства A и B несовместимы.

Хонсбергер проверяет гипотезу о том, что лекарства A и B на самом деле не помогают, а все излечившиеся выздоровели сами по себе, благополучно попав в те 50%, которые поправляются и без медицинской помощи. На основании результатов проверки Хонсбергер сам предпочел бы лекарство B.

Однако есть сомнения в том, что рассуждения Росса Хонсбергера корректны и в том, ту ли задачу он решает, которую сам сформулировал.

Группы пациентов действительно слишком малочисленны для надежных выводов. Но ведь речь идет не о надежности выводов, а о разумном предпочтении. Какое лекарство предпочли бы вы? Ваш разумный выбор нужно хорошенько обосновать.

[3] https://ru.wikipedia.org/wiki/Хонсбергер,_Росс

Задачи

Все задачи предполагают полные решения. Один лишь ответ без решения оценивается нулем баллов. Около каждой задачи указано, от какого класса оргкомитет рекомендует задачу, но это только ориентир. Любой участник может решать любую задачу и получать за нее баллы. Баллы за задачи суммируются.

4. Экстремальный набор (от 6 класса, 1 балл). Из цифр от 1 до 9 составлены три однозначных и три двузначных числа, причем цифры не повторяются. Найдите наименьшее возможное среднее арифметическое получившегося набора чисел.

5. Арифметическая плотность. Понятно, что если взять случайное натуральное число из достаточно длинного отрезка натурального ряда, то вероятность того, что это число будет делиться на 10, будет тем ближе к 0,1, чем длиннее отрезок.

Поставим другой вопрос: насколько сильно эта вероятность может отличаться от 0,1? Она может быть равна 0, если, например, мы задали отрезок $1, 2, 3$, где ни одно число не делится на 10. А какова:

а) (рек. от 6 класса, 1 балл) наибольшая возможная вероятность;

б) (рек. от 6 класса, 1 балл) минимально возможная ненулевая вероятность?

6. Средний вес (рек. от 6 класса, 2 балла) В классе меньше, чем 35 учеников. Средний вес всех учеников равен 53,5 кг. Средний вес девочек 47 кг, а средний вес мальчиков — 60 кг. Может ли оказаться так, что самый легкий ученик в этом классе – мальчик, а самый тяжелый – девочка? Приведите пример, либо объясните, почему это невозможно.

7. Три прокола. На каменистой дороге Рассеянный Ученый проколол колесо автомобиля сразу в трех совершенно случайных и независимых точках. Серьезный ремонт невозможен, но, к счастью, в багажнике нашлась старая довольно рваная колесная камера. Ученый сумел вырезать из нее большой неповрежденный кусок, которым можно накрыть пробитую шину изнутри на 2/3 ее длины или даже чуть больше.

а) (рек. от 6 класса, 1 балл). Докажите, что Ученый сможет разместить вырезанный кусок камеры внутри шины так, что все три прокола будут закрыты.

б) (рек. от 9 класса, 5 баллов). Какова вероятность того, что шину можно разрезать[4] на три равные по длине части, на каждой из которых будет ровно один прокол?

8. Разноцветные ленточки (от 6 класса, 3 балла). У Вали в шкатулке лежали пять разноцветных ленточек длиной 15, 20, 24, 26 и 30 см. Коля отрезал от некоторых (возможно, от всех) ленточек по кусочку. Средняя длина ленточек уменьшилось на 5 см, а медиана и размах длин не изменились. Чему теперь равны длины ленточек?

[4] Под разрезом здесь понимается разрез полуплоскостью, проходящей через ось колеса, то есть шину следует представлять как окружность, разрезанную на три равные дуги.

9. Мини-турнир (рек. от 7 класса, 1 балл). Алеша, Боря и Вася проводят между собой мини-турнир по теннису: каждый играет с каждым один раз. Выигравший получает 1 очко, проигравший 0, ничьих в теннисе не бывает. Абсолютным победителем мини-турнира объявляется тот, у кого в сумме 2 очка. Известно, что Алеша выигрывает у Бори с вероятностью 0,6, а Боря у Васи – с вероятностью 0,4. Какова вероятность события C «*абсолютного победителя не будет*»?

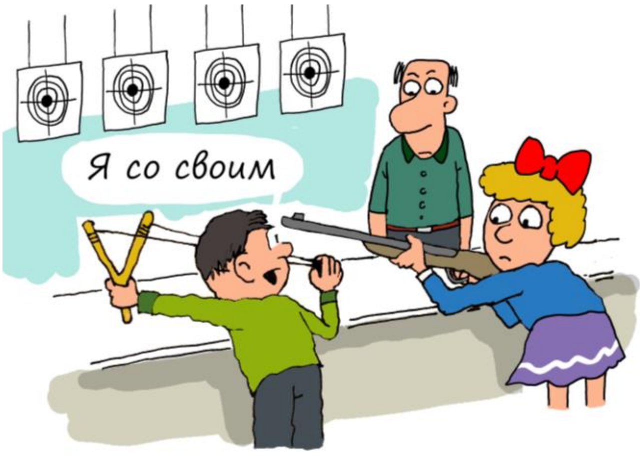
10. Тезки (рек. от 7 класса, 1 балл) Будем считать, что среди восьмиклассников имя Александр встречается в три раза чаще, чем имя Александра, Евгениев втрое меньше, чем Евгений, Валентинов в полтора раза больше, чем Валентин, а Василиев в 49 раз больше, чем Василис. Однажды совершенно случайно выбранная четверка восьмиклассников, про которых мы знаем только, что их зовут Саша, Женя, Валя и Вася, бросали жребий. Найдите вероятность того, что жребий выиграла восьмиклассница, а не восьмиклассник.

11. Волшебная ручка (рек. от 8 класса, 1 балл). Катя верно решает пример с вероятностью 4/5, а волшебная ручка верно решает пример без помощи Кати с вероятностью 1/2. В контрольной работе 20 примеров, и на четверку достаточно правильно решить 13 из них. Сколько Кате нужно решить примеров самостоятельно, а сколько доверить волшебной ручке, чтобы математическое ожидание числа правильных ответов было не меньше 13?

12. Ретро-коллекция (рек. от 8 класса, 2 балла). Витя коллекционирует игрушечные автомобили серии «Ретро». Проблема в том, что общее число различных моделей в серии неизвестно – это самый большой коммерческий секрет, но зато известно, что разные автомобили выпускаются одинаковым тиражом, и поэтому можно считать, что все модели распределены равномерно и случайно по разным интернет-магазинам.

На разных сайтах Витя нашел несколько предложений, но при ближайшем рассмотрении выяснилось, что среди предлагаемых машинок только 12 различных. Витя уже почти уверен, что всего машинок только 12 и что дальнейший поиск бесполезен. Но кто знает?

Сколько еще предложений от других магазинов должен рассмотреть Витя, чтобы убедиться в том, что моделей в серии всего 12? Витя считает себя убежденным в чем-то, если вероятность этого события выше, чем 0,99.



13. Юные стрелки. Валя и Коля пошли в тир. Коля предложил:

– Валь, давай стрелять по очереди. Кто первый попадет в мишень, тот и победил.

– Это нечестно! Ты стреляешь лучше. Помнишь, Рассеянный Ученый совершенно точно подсчитал, что на одно попадание ты расходуешь в среднем на один выстрел меньше, чем я.

– Хорошо, – согласился Коля. – Стреляй первой. Тогда у нас будут равные шансы на победу.

Валя немного подумала и сказала:

– Все равно нечестно. Давай лучше возьмем два ружья и будем стрелять одновременно, но по двум разным мишеням. Тогда может случиться ничья, а значит, вероятность того, что я хотя бы не проиграю, больше, чем при стрельбе по очереди.

а) (рек. от 8 класса, 2 балла). Прав ли Коля, утверждая, что если они будут стрелять по очереди, но Валя будет стрелять первой, то шансы у них равны?
б) (рек. от 8 класса, 3 балла). Права ли Валя, утверждая, что если стрелять по двум мишеням одновременно, то вероятность не проиграть у нее больше, чем вероятность победить при стрельбе по очереди?

14. Новогодняя задача (рек. от 8 класса, 4 балла). На новогоднем столе в ряд стоят 4 бокала: первый и третий с апельсиновым соком, а второй и четвертый – пустые. В ожидании гостей Валя рассеянно и случайно переливает сок из одного бокала в другой. За один раз она может взять полный бокал и перелить из него все содержимое в какой-нибудь из двух пустых бокалов.

Найдите математическое ожидание числа переливаний, в результате которых первый раз получится все наоборот: первый и третий будут пусты, а второй и четвертый – полны.

15. Гонцы (рек. от 9 класса, 3 балла). Однажды прекрасная королева Гвиневра, находясь в родительском замке, попросила короля Артура прислать ей 20 жемчужин. На дорогах неспокойно, и Артур на всякий случай решил послать 40 жемчужин, причем с разными гонцами, велев им скакать по разным дорогам. На пути гонцов могут подстерегать разбойники. Вероятность того, что каждый отдельный гонец будет ограблен, равна p, независимо от выбранной дороги и от судьбы других гонцов $(0<p<1)$.

Король в раздумьях: послать двух гонцов, дав каждому по 20 жемчужин, послать трех гонцов, дав одному 20, а двум по 10 жемчужин, или послать четырех гонцов, дав каждому по 10 жемчужин? Какой вариант следует выбрать королю, чтобы королева с наибольшей вероятностью получила хотя бы 20 жемчужин?

16. Технический перерыв (рек. от 9 класса, 3 балла). Женщина, работающая кассиром в железнодорожной кассе, увидела, что перед окошком нет покупателей, вздохнула, повесила объявление «Технический перерыв 15 минут» и ушла ровно на 15 минут. Когда Рассеянный Ученый подошел к кассе, он увидел, что перед ним в очереди уже пять желающих приобрести билет и покорно ждущих, когда окошко откроется. Какова вероятность того, что касса откроется не позже, чем через 3 минуты после прихода Ученого?

17. Капризная принцесса (рек. от 9 класса, 4 балла). Капризная принцесса выбирает жениха. К ней сватается 100 женихов, один другого лучше, и нет средь них двоих равных друг другу. Но только вот сватаются они в случайном порядке. Назовем жениха *видным*, если он нравится принцессе больше всех, кто сватался прежде. Первый по счету жених тоже видный, поскольку перед ним никого не было.

Будем говорить, что видный жених и все последующие, которые сватаются после него, но прежде следующего видного (если он есть), образуют *вереницу* женихов. Найдите математическое ожидание числа женихов в первой веренице.

18. Начальные слова (рек. от 9 класса, 5 баллов). Рассмотрим двоичную последовательность, то есть последовательность нулей и единиц. Назовем $1,k-1$-*словом* фрагмент этой последовательности вида $1\underbrace{00\ldots0}_{k-1}$, за которым непосредственно следует единица или конец последовательности.

Пример. В последовательности 01000**100**101**100** ровно два $1,2$-слова. Они выделены жирным шрифтом.

Докажите, что во всех бинарных последовательностях длины n, содержащих ровно m единиц, общее количество $1,k-1$-слов равно $m\cdot C_{n-k}^{m-1}$ $(k\le n)$.

19. Муха на решетке (рек. от 10 класса, 7 баллов). Муха ползет по решетке $n\times n$ из левого нижнего узла A в верхний правый узел B, двигаясь только вправо или вверх (рис. 2). Каково математическое ожидание числа поворотов на траектории мухи, если в каждом узле, где есть ветвление, муха с равными вероятностями выбирает следующий отрезок пути?

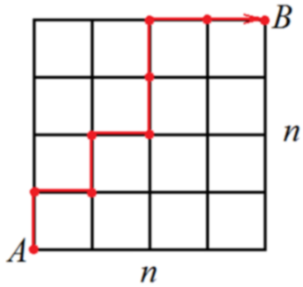


Рис. 2