МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР
11 класс

Задание 1.1

Назовем билетик «удачным», если сумма цифр шестизначного номера кратна 13. В этот раз Вася приобрел два «удачных» билетика, идущих подряд, то есть их номера отличаются на один. Найдите номера этих билетиков, если известно, что номер одного из билетов состоит только из 4 и 9, причём известно, что первая цифра – 4, а последняя – 9, а номер другого билетика состоит только из 4, 5 и трёх 0. В ответ запишите наибольший номер из двух.

Ответ: 445000

Решение: Существует довольно большое количество «удачных» билетиков, которые находятся при подборе. Сумма цифр в одном числе равна 13, так как точно есть четверка, три нуля, при наличии двух пятерок сумма равна 14, значит в записи две четверки, пятерка и три нуля. Сумма цифр второго числа можно выразить уравнением в натуральных числах: $4 * x + 9 * y = 13 * z$. Так как эти два числа последовательны, то при подборе получаем 444999 и 445000, тогда ответ 445000.

Задание 1.2

Назовем билетик «удачным», если сумма цифр шестизначного номера кратна 13. В этот раз Вася приобрел два «удачных» билетика, идущих подряд, то есть их номера отличаются на один. Найдите номера этих билетиков, если известно, что номер одного из билетов состоит только из 4 и 9, причём известно, что первая цифра – 4, а последняя – 9, а номер другого билетика состоит только из 4, 5 и трёх 0. В ответ запишите наименьший номер из двух.

Ответ: 444999

Решение: Существует довольно большое количество «удачных» билетиков, которые находятся при подборе. Сумма цифр в одном числе равна 13, так как точно есть четверка, три нуля, при наличии двух пятерок сумма равна 14, значит в записи две четверки, пятерка и три нуля. Сумма цифр второго числа можно выразить уравнением в натуральных числах: $4 * x + 9 * y = 13 * z$. Так как эти два числа последовательны, то при подборе получаем 444999 и 445000, тогда ответ 444999.

Задание 2.1

В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Найдите угол A, если известно, что $AD=DC$ и что $AC=2AB$?

Ответ: 60

Решение:

Москва
2022/2023 уч. г.

AD – биссектриса угла A, треугольник CDA – равнобедренный по определению, тогда $\angle DAC = \angle DCA$. Обозначим $\angle DCA = \alpha$. $\angle BAC = 2\alpha, \angle CBA = 180 - 3\alpha$.

Запишем теорему синусов для треугольника ABC. $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$, тогда из пропорции следует $\frac{\sin\alpha}{\sin(180^0-3\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{1}{2}$, после этого необходимо раскрыть синус тройного угла и решить уравнение. Угол $\alpha = 30^o$, то есть $\angle BCA = 30^\circ$, тогда $\angle BAC = 60^\circ$

Задание 2.2

В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *AD*. Найдите угол *C*, если известно, что *AD*=*DC* и что *AC*=2*AB*?

Ответ:30

Решение:

AD – биссектриса угла A, треугольник CDA – равнобедренный по определению, тогда $\angle DAC = \angle DCA$. Обозначим $\angle DCA = \alpha$. $\angle BAC = 2\alpha, \angle CBA = 180 - 3\alpha$.

Запишем теорему синусов для треугольника ABC. $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$, тогда из пропорции следует $\frac{\sin\alpha}{\sin(180^0-3\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{1}{2}$, после этого необходимо раскрыть синус тройного угла и решить уравнение. Угол $\alpha = 30^o$, то есть $\angle BCA = 30^\circ$,

Задание 3.1

На новогодней гирлянде 100 электрических огоньков. Гирлянда имеет несколько режимов. Сначала светятся все огоньки, если нажать кнопку, гаснет каждый второй огонек, при следующем нажатии кнопки переключаются каждый третий огонек (светился – отключается, не светился – начинает светиться), затем нажимают кнопку, происходит переключение каждого четвёртого огонька, затем каждого пятого и т.д. Найдите вероятность, что через сто нажатий, случайный огонек горит.

Ответ: 0.1

Решение: Огонек будет гореть только, если его переключили нечетное количество раз, то есть у номера этого огонька нечетное количество натуральных делителей, тогда номер огонька – это квадрат числа. Получается, что от 1 до 100 всего 10 огоньков с номерами 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 и 100 будут гореть. Тогда ответ 0.1

Задание 3.2

На новогодней гирлянде 100 электрических огоньков. Гирлянда имеет несколько режимов. Сначала светятся все огоньки, если нажать кнопку, гаснет каждый второй огонек, при следующем нажатии кнопки переключаются каждый третий огонек (светился – отключается, не светился – начинает светиться), затем нажимают кнопку, происходит переключение каждого четвёртого огонька, затем каждого пятого и т.д. Найдите вероятность, что через сто нажатий, случайный огонек не горит.

Ответ: 0.9

Решение:

Огонек будет гореть только, если его переключили нечетное количество раз, то есть у номера этого огонька нечетное количество натуральных делителей, тогда номер огонька – это квадрат числа. Получается, что от 1 до 100 всего 10 огоньков с номерами 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 и 100 будут гореть. Тогда не будет гореть 90 огоньков из 100, то есть P = 0.9

Задание 4.1

Найдите x_1 - корень уравнения $1 - sin\,x = cos\,2x$, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{13\pi}{12}; -\frac{11\pi}{12}\right]$. В ответ запишите значение $cos\,x_1 + sin\,x_1$.

Ответ: -1

Решение:

$$cos^2\,x = 1 - 2\,sin^2\,x$$

$$1 - 2\,sin^2\,x = 1 - sin\,x \Leftrightarrow 2\,sin^2\,x - sin\,x = 0 \Leftrightarrow sin\,x\,(sinx - 0.5) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \pi k, \qquad k \in z \\ x = (-1)^k\,\dfrac{\pi}{6} + \pi t, t \in z \end{array}\right.$$

Отрезку принадлежит корень: $-\pi,$ тогда ответ на вопрос задачи $-$ это $-\,1.$

Задание 4.2

Найдите x_1 - корень уравнения $1 - sin\,x = cos\,2x$, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{13\pi}{12}; -\frac{11\pi}{12}\right]$. В ответ запишите значение $2\,cos\,x_1$.

Ответ: -2

Решение:

$$cos^2\,x = 1 - 2\,sin^2\,x$$

$$1 - 2\,sin^2\,x = 1 - sin\,x \Leftrightarrow 2\,sin^2\,x - sin\,x = 0 \Leftrightarrow sin\,x\,(sinx - 0.5) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \pi k, \qquad k \in z \\ x = (-1)^k\,\dfrac{\pi}{6} + \pi t, t \in z \end{array}\right.$$

Отрезку принадлежит корень: $-\pi,$ тогда ответ на вопрос задачи $-$ это -2.

Задание 5.1

По разные стороны от центра шара проведены два параллельных сечения, расстояние между сечениями 12 см, $S1$=$S2$=16π см2. Известно, что в шаре есть сферическая полость радиусом $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$см, центры шара и полости совпадают. Найдите отношение объёма шарового слоя без объёма полости к объёму полости.

Ответ: 479

Решение:

R сечения равен 5, так как $S = \pi R^2$, тогда необходимо применить формулу нахождения объема шарового слоя: $V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(R_1^2 + R^2)h$. Объем полости равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi$. После подстановки значений в формулу получится V = 480 π, поэтому $\frac{480\pi-\pi}{\pi} = 479$

Задание 5.2

По разные стороны от центра шара проведены два параллельных сечения, расстояние между сечениями 6 см, $S1$=$S2$=25π см2. Известно, что в шаре есть сферическая полость радиусом $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$см, центры шара и полости совпадают. Найдите отношение объёма шарового слоя без объёма полости к объёму полости.

Ответ: 185

Решение: R сечения равен 5, так как $S = \pi R^2$, тогда необходимо применить формулу нахождения объема шарового слоя: $V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(R_1^2 + R^2)h$. Объем полости равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi$. После подстановки значений в формулу получится V = 186 π, поэтому $\frac{186\pi-\pi}{\pi} = 185$

Задание 6.1

Рассмотрите только те трёхзначные числа, которые НЕ оканчиваются двумя нулями и ответьте на вопросы.

Найдите пример трёхзначного числа больше 700, но меньше 900, которое в 90 раз больше суммы его цифр.

Какое наибольшее натуральное число можно получить при делении трёхзначного числа на сумму его цифр?

Ответ: 810 91

Решение: Представим число в следующем виде $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Примером числа может выступить 810.

$$100x + 10y + z = n(x + y + z)$$

$$(100 - n)x = y(n - 10) + z(n - 1) \leq 9(100 - n)$$

$$n \leq \frac{900 + 10y + z}{y + z + 9} = 10 + \frac{810 - 9z}{y + z + y} \leq 10 + \frac{810}{10} = 91$$

Пример: число 910.

Задание 6.2

Рассмотрите только те трёхзначные числа, которые НЕ оканчиваются двумя нулями и ответьте на вопросы.

Найдите пример трёхзначного числа больше 600, но меньше 900, которое в 90 раз больше суммы его цифр.

Найдите максимальное трёхзначное число, которое при делении на сумму своих цифр даст 91.

Ответ: 810 910

Решение:

Представим число в следующем виде $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$. Примером числа может выступить 810.

$$100x + 10y + z = n(x + y + z)$$

$$(100 - n)x = y(n - 10) + z(n - 1) \leq 9(100 - n)$$

$$n \leq \frac{900 + 10y + z}{y + z + 9} = 10 + \frac{810 - 9z}{y + z + y} \leq 10 + \frac{810}{10} = 91$$

Пример: число 910.