МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР
10 класс

1 вариант

Задание 1.1

В каждой ячейке таблицы 5×5 стоит число 1 или -1. Известно, что число строк с положительной суммой чисел больше, чем число строк с отрицательной суммой. Найдите наибольшее возможное количество столбцов с отрицательной суммой чисел.

Ответ: 5

Решение:

1	-1	1	-1	1
-1	1	1	1	-1
1	1	-1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1

По условию задачи можно привести пример, так как с отрицательной суммой 5 столбцов из 5, то это максимальное значение.

Задание 1.2

В каждой ячейке таблицы 5×5 стоит число 1 или -1. Известно, что число строк с положительной суммой чисел больше, чем число строк с отрицательной суммой. Сколько столбцов с положительной суммой может быть, если столбцов с отрицательной суммой максимально возможное количество? В ответ запишите число от 0 до 5.

Ответ: 0

Решение:

1	-1	1	-1	1
-1	1	1	1	-1
1	1	-1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1

По условию задачи можно привести пример, так как с отрицательной суммой 5 столбцов из 5, то это максимальное значение, тогда количество столбцов с положительной суммой в этом случае – 0.

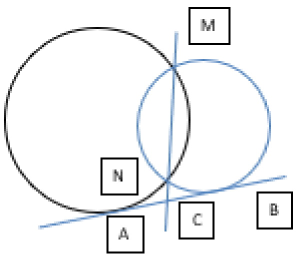
Задание 2.1

Две окружности пересекаются в точках M и N, общая касательная касается одной окружности в точке A, другой – в точке B. Отрезок MN пересекается с AB в точке C. Найдите отношение AC:CB.

Ответ: 1

Решение:

Из теоремы о касательной и секущей: $CA^2 = CM * CN$, $CB^2 = CM * CN$, из чего можно сделать вывод, что $CA = CB$, тогда $AC: CB = 1$

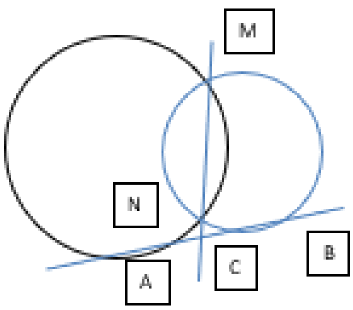


Задание 2.2

Две окружности пересекаются в точках M и N, общая касательная касается одной окружности в точке A, другой – в точке B. Отрезок MN пересекается с AB в точке C. Найдите отношение BC:CA.

Ответ: 1

Решение:



Из теоремы о касательной и секущей: $CA^2 = CM * CN$, $CB^2 = CM * CN$, из чего можно сделать вывод, что $CA = CB$, тогда $BC: CA = 1$

Задание 3.1

На экзамене студент тянет 3 вопроса из 5. Известно, что есть 2 «пустых» вопроса, то есть студенту не придётся на него отвечать. Какова вероятность вытянуть ровно 2 «пустых» вопроса из трёх?

Ответ: 0.3

Решение: Необходимо применить формулу гипергеометрического распределения:

$P = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = 0.3$

Задание 3.2

На экзамене студент тянет 3 вопроса из 5. Известно, что есть 2 «пустых» вопроса, то есть студенту не придётся на него отвечать. Какова вероятность не вытянуть ровно 2 «пустых» вопроса из трёх?

Ответ: 0.7

Решение: Необходимо применить формулу гипергеометрического распределения:

$P = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = 0.3$

Вероятность не вытянуть ровно 2 «пустых» вопроса: 1 - P = 1 – 0.3 = 0.7

Задание 4.1

Найдите x_1 - корень уравнения $1 - \sin x = \cos 2x$, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{15\pi}{7}; -\frac{13\pi}{7}\right]$. В ответ запишите значение $\cos x_1$.

Ответ: -1

Решение: $\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

$$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x\,(\sin x - 0.5) = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \pi k, \qquad k \in z \\ x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi t, t \in z \end{array}\right.$$

Отрезку принадлежит корень: -2π, тогда ответ на вопрос задачи $-$ это -1.

Задание 4.2

Найдите x_1 - корень уравнения $1 - \sin x = \cos 2x$, принадлежащий отрезку $\left[-\frac{17\pi}{8}; -\frac{15\pi}{8}\right]$. В ответ запишите значение $\sin x_1$.

Ответ: 0

Решение:

$$cos^2 x = 1 - 2\, sin^2 x$$

$$1 - 2\, sin^2 x = 1 - sin\, x \Leftrightarrow 2\, sin^2 x - sin\, x = 0 \Leftrightarrow sin\, x\,(sinx - 0.5) = 0$$

$$\begin{cases} x = \pi k, \quad k \in z \\ x = (-1)^k\, \dfrac{\pi}{6} + \pi t, t \in z \end{cases}$$

Отрезку принадлежат корни: $-2\pi,$ тогда ответ на вопрос задачи $-$ это 0.

Задание 5.1

Про измерения прямоугольного параллелепипеда известно, что ширина в два раза больше длины, а высота в пять раз больше длины. Площадь поверхности фигуры равна площади поверхности шара с радиусом *R*. Найдите значение радиуса, округлив до десятых. Объём параллелепипеда равен 10. *Значение π=3.14.*

Ответ: 1.6

Решение: Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда равна площади поверхности шара $2 \cdot (a \cdot 2a + a \cdot 5a + 2a \cdot 5a) = 4\pi R^2$, так как V = a*2a*5a, то a = 1, тогда R = 1.6.

Задание 5.2

Про измерения прямоугольного параллелепипеда известно, что ширина в два раза больше длины, высота в пять раз больше длины. Площадь поверхности фигуры равна площади поверхности шара с радиусом *R*. Найдите значение радиуса, округлив до десятых. Объем параллелепипеда равен 80. *Значение π=3,14.*

Ответ: 3.3

Решение: Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда равна площади поверхности шара $2 \cdot (a \cdot 2a + a \cdot 5a + 2a \cdot 5a) = 4\pi R^2$, так как V = a*2a*5a, то a = 2, тогда R = 1.6.

Задание 6.1

Известно, что в выпуклом четырёхугольнике *ABCD* углы *ABD* и *BDC* равны 50∘, а углы *BCA* и *CAD* – 40∘ градусам. Известно, что угол *A* меньше угла *B*, *AB*=*BC*. Определите, чему равен каждый угол.

1. ABC
2. BCD
3. CDA

4. DAB?

Ответ:

1. 100
2. 80
3. 100
4. 80

Решение: Треугольник ABC – равнобедренный по определению. ABCD – параллелограмм, так как накрест лежащие углы $\angle ABD$ и $\angle BDC$ *равны* при прямых AB и CD, аналогично доказывается, что прямые AD и BC параллельны. Так как в параллелограмме две соседние стороны равны, то ABCD – ромб по признаку. Углы $\angle$BAC и $\angle$BCA равны 50º, как углы р/б треугольника, углы $\angle$BCA и $\angle$CAD, угол $\angle$BAD равен сумме углов $\angle$BAC и $\angle$CAD, тогда $\angle$BAD = 100º, так как четырехугольник – ромб, то $\angle$BCD = 100º, $\angle$ADB = $\angle$ABC = 80º.

Задание 6.2

Известно, что в выпуклом четырёхугольнике *ABCD* углы *ABD* и *BDC* равны 30º градусам, а углы *BCA* и *CAD* – 60º градусам. Известно, что угол *A* больше угла *B*, *AB*=*BC*. Определите, чему равен каждый угол.

1. ABC
2. BCD
3. CDA
4. DAB?

Ответ:

1. 60
2. 120
3. 60
4. 120

Решение: Треугольник ABC – равнобедренный по определению. ABCD – параллелограмм, так как накрест лежащие углы $\angle ABD$ и $\angle BDC$ *равны* при прямых AB и CD, аналогично доказывается, что прямые AD и BC параллельны. Так как в параллелограмме две соседние стороны равны, то ABCD – ромб по признаку. Углы $\angle$BAC и $\angle$BCA равны 60 º, как углы р/б треугольника, углы $\angle$BCA и $\angle$CAD, угол $\angle$BAD равен сумме углов $\angle$BAC и $\angle$CAD, тогда $\angle$BAD = 120º, так как четырехугольник – ромб, то $\angle$BCD = 120º, $\angle$ADB = $\angle$ABC = 60º.