7 класс

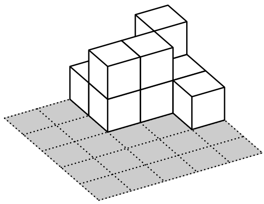
Задача 1. Аня называет дату красивой, если все 6 цифр её записи различны. Например, 19.04.23 — красивая дата, а 19.02.23 и 01.06.23 — нет. А сколько всего красивых дат в 2023 году? [*4 балла*] (*М. Евдокимов*)

Ответ. 30.

Решение. Цифры 2 и 3 уже участвуют в номере года, поэтому из всех месяцев нужно рассмотреть только 01, 04, 05, 06, 07, 08, 09 и 10. В каждом из этих номеров есть 0, поэтому в красивой дате не будет дня с номером, начинающимся с 0, 2 и 3, а также не будет дней 10, 11, 12 и 13 — остаются только 6 дней, с 14 по 19. Но тогда в каждом месяце красивая дата начинается с 1, и подходят только 6 месяцев, с 04 по 09. Остаётся заметить, что для каждого подходящего месяца ровно один день, оканчивающийся на ту же цифру, не будет красивым — значит, в каждом из 6 месяцев по 5 красивых дат, а всего в 2023 году — 30.

Задача 2. Посреди пустого бассейна стоит квадратная платформа 50×50 сантиметров, расчерченная на клеточки 10×10 см. На клетки платформы Лена ставит башенки из кубиков $10 \times 10 \times 10$ см. Потом Таня включает воду.

Если высоты башенок были такие, как в таблице справа, то при уровне воды 5 см был 1 остров, при уровне воды 15 см было два острова (если острова «граничат по углу», то считаются отдельными островами), а при уровне воды 25 см все башенки оказались закрыты водой и стало 0 островов.



0	0	1	1	2
0	0	2	2	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Придумайте, какие башенки из кубиков можно поставить, чтобы количество островов было следующим:

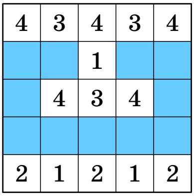
Уровень воды (см)	5	15	25	35	45
Количество островов	2	5	2	5	0

В ответе напишите в каждой клетке квадрата 5 на 5, сколько кубиков на ней стоит. **[*4 балла*]**

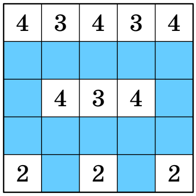
(*Т. Голенищева-Кутузова, И. Ященко*)

Ответ. Один из возможных примеров приведён на рисунке ниже. На следующих рисунках показано, какие клетки закрыты водой при разных уровнях воды.

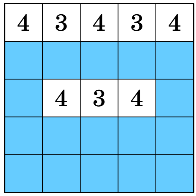
4	3	4	3	4
0	0	1	0	0
0	4	3	4	0
0	0	0	0	0
2	1	2	1	2



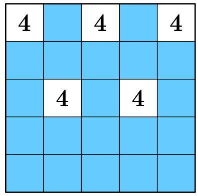
5 см



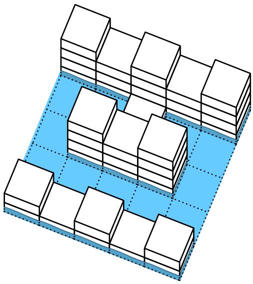
15 см

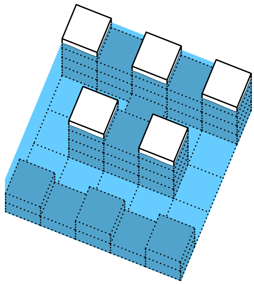


25 см



35 см

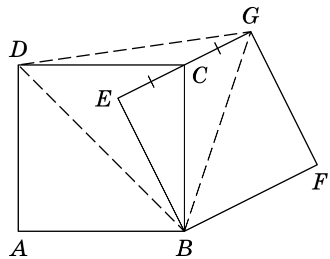




Комментарий. Изучая, как меняется рельеф местности при постепенно поднимающемся уровне воды, можно доказать замечательную теорему Эйлера. Об этом можно прочитать в статье М. Шубина «Топология и... рельеф местности» (журнал «Квант» № 8 за 1982 год, kvant.ras.ru).

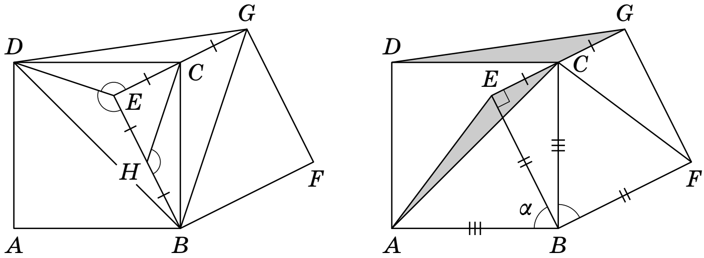
Задача 3. См. задачу 3 для 6 класса (с. 4).

Задача 4. Два квадрата расположены как на рисунке, отмеченные отрезки равны. Докажите, что треугольник BDG равнобедренный. **[*6 баллов*]**



Решение 1. Рассмотрим треугольники DEG и DEB. У них общая сторона DE, равные стороны EG и EB (как две стороны квадрата). Осталось доказать, что углы DEG и DEB равны, — тогда указанные треугольники будут равны (по двум сторонам и углу между ними), а значит, будут равны и соответственные стороны DG и DB.

Равенство этих углов можно доказать так. Отметим H — середину отрезка EB. Заметим, что $HB = EC$ как половины стороны правого квадрата, а также $BC = DC$, $\angle HBC = 90^\circ - \angle ECB = \angle ECD$. Значит, треугольники HBC и ECD равны по двум сторонам и углу между ними. Так как треугольник EHC равнобедренный прямоугольный, $\angle EHC = 45^\circ$, а $\angle DEG = \angle CHB = 180^\circ - \angle EHC = 135^\circ$. Но тогда и $\angle DEB = 360^\circ - \angle DEG - \angle GEB = 360^\circ - 135^\circ - 90^\circ = 135^\circ$.



Решение 2. Заметим, что $BD = AC$ как диагонали квадрата. Если мы докажем, что треугольники CEA и GCD (на рисунке справа отмечены серым) равны, то из равенства соответственных сторон AC и DG будет следовать $DG = AC = BD$. Как доказать равенство этих треугольников?

Рассмотрим треугольники ABE и CBF. У каждого из них две стороны равны сторонам исходных квадратов. Равны и углы между этими сторонами: каждый из них дополняет угол EBC до прямого угла квадрата. Значит, эти треугольники равны.

Но треугольник BCF равнобедренный (так как он «расположен в квадрате симметрично»; более формально: CB и CF — гипотенузы прямоугольных треугольников CBE и CFG, равных по двум катетам). Значит, $CF = CB = AB = AE$.

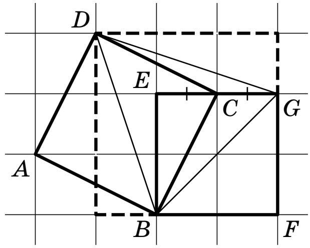
Теперь мы знаем, что в серых треугольниках равны стороны AE и DC, а стороны CE и CG равны по условию. Осталось доказать, что равны углы между сторонами.

Если угол при основании равнобедренных треугольников ABE и CBF равен α, то $\angle AEC = 90^\circ + \alpha$. Но и $\angle DCG = 360^\circ - \angle BCD - \angle BCG = 360^\circ - 90^\circ - (180^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$

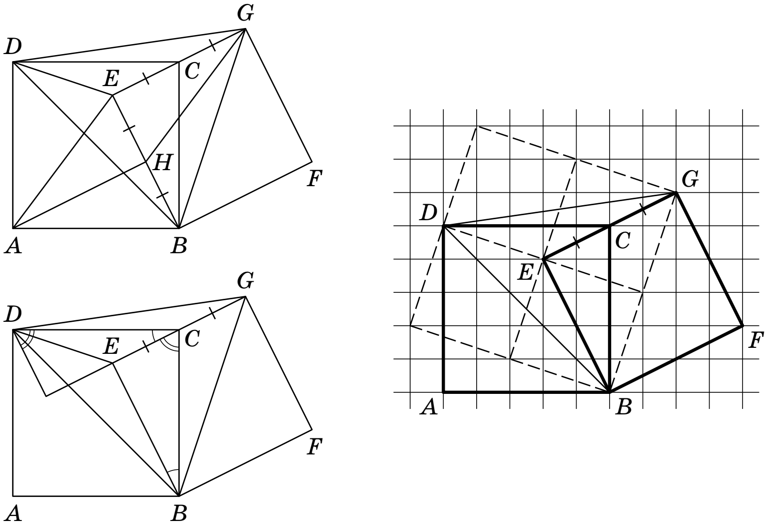
($\angle CBF = \alpha$ и $\angle BCG$ дают в сумме 180° как односторонние при параллельных сторонах квадрата и секущей BC).

Равенство серых треугольников (а вместе с ним и утверждение задачи) доказано.

Решение 3. Перенесём чертёж на клетчатую бумагу. Начнём с квадрата $BEGF$: пусть это клетчатый квадрат 2×2. По отрезку BC построим квадрат $ABCD$. Теперь видно, что отрезки DG и DB равны как гипотенузы прямоугольных треугольников с катетами длиной 1 клетка и 3 клетки.



Комментарий. Есть множество дополнительных построений, которые также позволяют решить задачу. Вот некоторые из них:



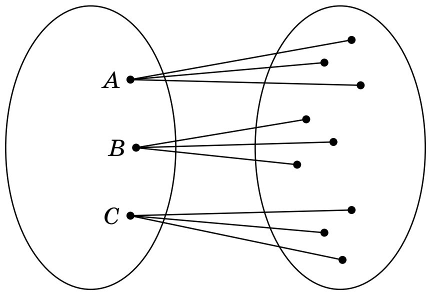
Задача 5. В параллели 7-х классов 100 учеников, некоторые из которых дружат друг с другом. 1 сентября они организовали несколько клубов, каждый из которых основали три ученика (у каждого клуба свои). Дальше каждый день в каждый клуб вступали те ученики, кто дружил хотя

бы с тремя членами клуба. К 19 февраля в клубе «Гепарды» состояли все ученики параллели. Могло ли получиться так, что в клубе «Черепахи» в этот же день состояло ровно 50 учеников? **[*8 баллов*]**

(*В. Клепцын, М. Раскин*)

Ответ. Да, могло.

Решение. Разделим семиклассников на две группы по 50 учеников. Пусть в каждой группе все ученики дружат со всеми, причём у троих учеников A, B и C из первой группы есть ещё по 3 разных друга во второй группе, и больше никто ни с кем не дружит.



Группа №1 Группа №2

Тогда в клубе «Гепарды», основанном любыми тремя учениками второй группы, после первого дня будет состоять вся вторая группа, после второго дня в него будут входить A, B и C из первой, а уже после третьего дня в клубе «Гепарды» будут состоять все ученики параллели.

Если же основателями клуба «Черепахи» будут A, B и C из первой группы, то на следующий день вся первая группа будет в клубе «Черепахи», но ни у кого из второй группы нет трёх друзей в первой, поэтому никто из второй группы в этот клуб не попадёт.

Задача 6. У царя есть 7 мешков с золотыми монетами, в каждом по 100 монет. Царь помнит, что в одном мешке все монеты весят 7 г, во втором 8 г, в третьем 9 г, в четвёртом 10 г, в пятом 11 г, в шестом 12 г, в седьмом 13 г, но не помнит, где какие.

Царь сообщил это придворному мудрецу и указал на один из мешков. Мудрец может вынимать из этого и из других мешков любое количество монет, но на вид они все одинаковы. Однако у мудреца есть большие двухчашечные весы без гирь (они точно покажут, равны ли веса на чашках, а если нет, то какая чашка тяжелее). Может ли мудрец определить, какие монеты в указанном мешке, сделав не более двух взвешиваний? **[*8 баллов*]** (*М. Евдокимов*)

Ответ. Да, может.

Решение. Заметим что если взять из каждого мешка по монете, то их суммарный вес будет равен $7+8+\ldots+13=70$ грамм. Назовём такой набор монет *комплектом*.

Пусть в указанном царём мешке монеты весят x грамм каждая. Если взять 70 таких монет, то их вес равен $70x$ — такой же, как у x комплектов. То есть если мудрец узнает, сколько комплектов нужно, чтобы уравновесить эти 70 монет, он ответит на вопрос царя.

Пускай первым взвешиванием мудрец сравнит вес этих 70 монет и 10 комплектов. Если весы в равновесии, то $x=10$ и задача решена, если монеты перевесили, то $x>10$, если перевесили комплекты, то $x<10$.

Если мудрец знает, что $x>10$, то за одно взвешивание он легко выяснит, весят монеты 11, 12 или 13 г каждая. Действительно, теперь можно сравнить вес 70 монет и 12 комплектов. Если монеты перевесили, то $x=13$, если весы в равновесии, то $x=12$, если комплекты перевесили, то $x=11$.

Аналогичным образом мудрец может поступить в случае $x<10$: монеты тогда могут весить по 7, 8 или 9 г, так что осталось сравнить вес 70 монет и 8 комплектов.

Отметим, что при каждом взвешивании мудрец использует не более чем $70+12$ монет из мешка, на который указал царь, и не более чем по 12 монет из остальных мешков. Так что монет в мешках ему хватит.

Комментарии. 1. Если снять с обеих чаш одинаковый набор монет, то результат взвешивания не изменится. Пользуясь этим соображением, мудрец сможет решить задачу и когда в каждом мешке хотя бы по $70-8=62$ монеты.

2. В решении используется лишь суммарный вес 7 монет. Поэтому аналогичным образом можно решить задачу не только для монет весом 7, 8, ..., 13 грамм, но и для любого другого набора из семи различных весов (при достаточном количестве монет в мешках).