11 класс, первый день

1. К графикам функций $y = \cos x$ и $y = a \operatorname{tg} x$ провели касательные в некоторой точке их пересечения. Докажите, что эти касательные перпендикулярны друг другу для любого $a \neq 0$.

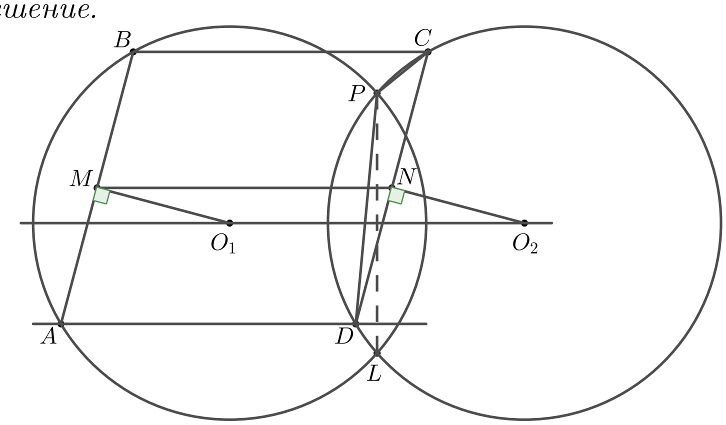
(*В.А. Клепцын, Г.А. Мерзон*)

Решение. Абсцисса x_0 любой точки пересечения графиков данных функций удовлетворяет равенству $\cos x_0 = a \operatorname{tg} x_0$. В этой точке касательная к графику функции $y = \cos x$ имеет угловой коэффициент $k_1 = -\sin x_0$, а касательная к графику функции $y = a \operatorname{tg} x$ имеет угловой коэффициент $k_2 = \frac{a}{\cos^2 x_0}$. Поскольку $k_1 k_2 = -\frac{a \operatorname{tg} x_0}{\cos x_0} = -1$, эти касательные перпендикулярны друг другу.

2. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, отличный от прямоугольника, а точка P выбрана внутри него так, что описанные окружности треугольников PAB и PCD имеют общую хорду, перпендикулярную AD. Докажите, что радиусы данных окружностей равны.

(*А.А. Заславский*)

Решение.



Способ 1. Заметим, что линия центров O_1O_2 перпендикулярна общей хорде данных окружностей, а значит параллельна прямым AD и BC. Пусть M — середина отрезка AB, N — середина отрезка CD. Тогда $O_1M \perp AB$, $O_2N \perp CD$ и, поскольку $AB \| CD$, прямые O_1M и O_2N параллельны. Далее, $O_1O_2 \| AD$ и при этом $AD \| MN$, поэтому $O_1O_2 \| MN$. Заключаем, что четырёхугольник O_1MNO_2 — параллелограмм по определению, следовательно, $O_1M = O_2N$. Кроме того, поскольку отрезки MB и NC равны, то по двум катетам будут равны прямоугольные треугольники O_1MB и O_2NC, следовательно, равны их гипотенузы O_1B и O_2C, являющиеся также радиусами наших окружностей, что и требовалось.

Способ 2. Предположим противное, радиусы окружностей ω_1 и ω_2, описанных около треугольников PAB и PCD соответственно, различны.

При параллельном переносе на $\overrightarrow{CB}$ отрезок CD перейдёт в отрезок AB, окружность ω_2 перейдёт в окружность ω_3, а прямая O_1O_2 перейдёт в себя. Причём ω_3 не может совпадать с ω_1, поскольку их радиусы различны. Поэтому линия центров O_3O_1, совпадающая с прямой O_1O_2, перпендикулярна общей хорде AB. Таким образом, прямая AB параллельна общей хорде окружностей ω_1 и ω_2 и, следовательно, перпендикулярна прямой AD. Но тогда параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником, что противоречит условию задачи. Следовательно, радиусы окружностей ω_1 и ω_2 равны.

3. Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 5$ с целыми коэффициентами, имеющий n различных целых корней. Докажите, что многочлен $P(x) + 3$ имеет n различных действительных корней.

(*М.И. Малкин*)

Решение. Пронумеруем корни многочлена в порядке возрастания $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Тогда многочлен можно представить в виде

$$P(x) = a(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n), \quad a \neq 0, \quad a, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}.$$

Покажем, что значение многочлена P в любой точке локального экстремума по модулю больше 3 (тогда при сдвиге графика многочлена на 3 единицы вверх или вниз количество его точек пересечения с осью абсцисс не изменится). Точки локальных экстремумов многочлена P находятся на промежутках $(a_i; a_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Вычислим значения $|P(x)|$ в точках $x_i = a_i + \frac{1}{2}$. Так как корней не меньше шести, то

$$|P(x_i)| = |a(x_i - a_1)(x_i - a_2)\ldots(x_i - a_n)| \geqslant |a| \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{25}{4} = |a| \cdot \frac{225}{64} = |a| \cdot 3\frac{33}{64} > 3.$$

В произведении мы оставляем шесть наименьших по модулю множителей, остальные (есть при $n > 6$) ещё больше.

4. В турнире по теннису (где не бывает ничьих) участвовало более 4 спортсменов. Каждый игровой день каждый теннисист принимал участие ровно в одной игре. К завершению турнира каждый сыграл с каждым в точности один раз. Назовём игрока *упорным*, если он выиграл хотя бы один матч и после первой своей победы ни разу не проигрывал. Остальных игроков назовём *неупорными*. Верно ли, что игровых дней, когда была встреча между неупорными игроками, больше половины?

(*Б.Р. Френкин*)

Решение. В последний день все упорные выиграли. Значит, их не больше половины. Если их меньше половины, то каждый день была встреча между неупорными игроками. Остаётся рассмотреть случай, когда количество упорных k составляет половину от общего количества игроков $2k$.

Такой турнир длился $2k-1$ дней, и нужно доказать, что были хотя бы k дней, когда была встреча между неупорными. Это равносильно тому, что было хотя бы k дней, в которые была встреча между упорными, так как и тех, и других — ровно половина (если все упорные играют с неупорными, то в этих встречах участвуют все неупорные, и обратно).

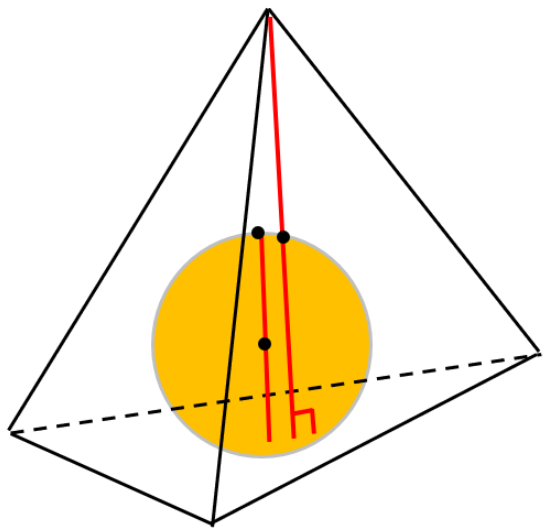
Предположим противное: пусть встречи между неупорными игроками проходили менее, чем в половине всех дней турнира. Тогда, в силу замечания выше, то же самое можно сказать и про встречи между упорными игроками. Так как всего упорных игроков k, каждый упорный играл с упорными $k - 1$ день. Поэтому единственный возможный вариант, при котором встречи между упорными игроками проходили менее чем в половине дней турнира, — это когда все упорные играют между собой в одни и те же дни. Другими словами можно сказать, что упорные проводят в этот $k - 1$ день между собой минитурнир, а такое возможно только если число упорных игроков чётно.

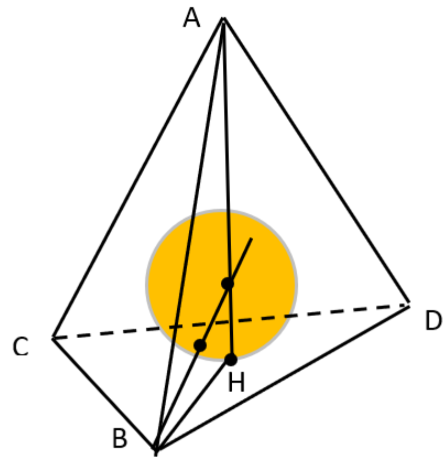
Вспомним теперь, что $2k > 4$, то есть $k > 2$, а поскольку k — чётное, то $k \geqslant 4$. Тогда в первый из дней минитурнира играли по крайней мере две пары упорных игроков, а значит было хотя бы два упорных, победивших в этот день. В дальнейшем они должны сыграть между собой, но тогда один из них проиграет после того как выиграл. Противоречие. Значит, наше предположение неверно, и игровых дней, когда была встреча между неупорными игроками, не менее половины.

5. Середины всех высот некоторого тетраэдра лежат на его вписанной сфере. Верно ли, что тетраэдр правильный?

(*М.А. Евдокимов*)

Решение.





Рассмотрим тетраэдр $ABCD$, удовлетворяющий условию задачи. Заметим, что по условию для любой высоты h_i данного тетраэдра справедливо неравенство $\dfrac{h_i}{2} \leqslant 2r$, где r — радиус вписанной сферы, то есть $h_i \leqslant 4r$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Пусть S_i — площадь грани, на которую опущена высота h_i. Докажем, что $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

Предположим противное. Выберем грань минимальной площади (если таких граней несколько, то берём любую из них). Без нарушения общности можно считать, что её площадь равна S_1 (иначе можно ввести переобозначения). Так как не все S_i равны между собой и S_1 — наименьшая из них, то

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4} > S_1.$$

Выразим объём тетраэдра двумя способами:

$$V = \frac{1}{3}h_1 S_1 = \frac{1}{3}r\left(S_1 + S_2 + S_3 + S_4\right) > \frac{1}{3}r \cdot 4S_1.$$

Отсюда $h_1 > 4r$, что противоречит неравенству $h_1 \leqslant 4r$.

Итак, все S_i равны, поэтому все h_i тоже равны, так как $h_i = \dfrac{3V}{S_i}$. Обозначим за h длину этих равных высот. Из приведённого выше соотношения для объёма получаем $h = 4r$, то есть неравенство $h \leqslant 4r$ обращается в равенство. Но это возможно только в случае, если высота содержит центр сферы и точку касания с гранью (и так для каждой высоты).

Пусть H — основание высоты тетраэдра, опущенной из точки A. Тогда H совпадает с точкой касания сферы и грани BCD. Пусть $BH = a$, тогда по теореме о касательной и секущей $a^2 = \dfrac{h}{2} \cdot h$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABH получаем

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = h^2 + a^2 = h^2 + \frac{h^2}{2} = \frac{3h^2}{2}.$$

Аналогично получаем такое же выражение для остальных рёбер тетраэдра, следовательно, они равны между собой, то есть тетраэдр правильный.

6. Назовём тройку чисел *триплетом*, если одно из них равно среднему арифметическому двух других. Дана бесконечная последовательность (a_n), состоящая из натуральных чисел. Известно, что $a_1 = a_2 = 1$ и при $n > 2$ число a_n — минимальное натуральное число такое, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нет трёх, образующих триплет. Докажите, что $a_n \leqslant \dfrac{n^2+7}{8}$ для любого n.

(*Б.Г. Бутырин*)

Решение. Очевидно, что последовательность не убывает. Действительно, неравенство $a_n > a_{n+1}$ противоречило бы выбору a_n. Также понятно, что любое число повторяется не более, чем дважды, иначе в последовательности найдутся три одинаковых числа, а они образуют триплет. Теперь легко видеть, что если число c впервые встречается в последовательности в качестве a_n, то $a_{n+1} = a_n = c$.

Таким образом, для любого натурального числа k верно равенство $a_{2k-1} = a_{2k}$. Заметим, что тогда достаточно доказать требуемое неравенство только для нечетных индексов:

$$a_{2k} = a_{2k-1} \leqslant \frac{(2k-1)^2+7}{8} \leqslant \frac{(2k)^2+7}{8}.$$

Положим $b_k = a_{2k-1}$. Тогда нужно доказать, что

$$b_k \leqslant \frac{(2k-1)^2+7}{8} = \frac{k(k-1)}{2} + 1.$$

Отметим, что последовательность (b_n) обладает тем свойством, что при $k > 1$ очередной член последовательности b_k — минимальное натуральное число, которое не образует триплет с парами чисел из $\{b_1, \ldots, b_{k-1}\}$, где пара может иметь вид (b_i, b_i). При этом $b_k > b_{k-1}$, то есть (b_n) строго возрастает, в отличие от (a_n).

Пусть n — минимальное натуральное число, для которого требуемое неравенство неверно, то есть $b_n > \dfrac{n(n-1)}{2} + 1$. Это означает, что среди чисел от 1 до $\dfrac{n(n-1)}{2} + 1$ содержится ровно $n-1$ член последовательности, поскольку при $m < n$ по предположению имеем

$$b_m \leqslant \frac{m(m-1)}{2} + 1 < \frac{n(n-1)}{2} + 1.$$

Обозначим через s количество чисел в промежутке от 1 до $\dfrac{n(n-1)}{2} + 1$, не принадлежащих последовательности (b_n). Тогда

$$s = \frac{n(n-1)}{2} + 1 - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = C_{n-1}^2 + 1.$$

Обозначим эти числа через d_i, $1 \leqslant i \leqslant s$.

В силу минимальности каждого из b_m для любого $1 \leqslant k \leqslant s$ найдутся такие числа b_{i_k}, b_{j_k}, где $i_k \leqslant j_k \leqslant n-1$, что (b_{i_k}, b_{j_k}, d_k) — триплет. При этом можно считать, что d_k — наибольший элемент в триплете, иное бы противоречило выбору наименьшего элемента последовательности (b_n), большего d_k. Отсюда $i_k < j_k$.

Тогда число способов выбрать пару (i_k, j_k) не превосходит C_{n-1}^2, то есть не больше количества способов выбрать два различных индекса из $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. В то же время парами (i_k, j_k) нужно обеспечить $s > C_{n-1}^2$ чисел d_i. Полученное противоречие завершает решение.