LXXVII Московская астрономическая олимпиада (2023 г.)

Теоретический тур. Решения и критерии оценивания

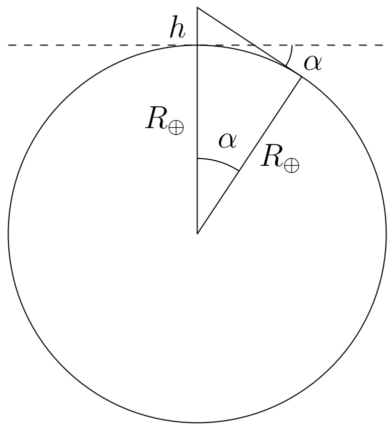
9 класс

Задача 1

Самолёт на высоте $h = 10$ км пролетает над Сингапуром (широта $\varphi \approx 0°$) в день весеннего равноденствия. Пассажиры видят восход Солнца. Через какое время восход Солнца увидят жители Сингапура? Атмосферной рефракцией пренебречь.

Решение. В день весеннего равноденствия момент восхода Солнца происходит в одно и тоже местное солнечное время в любой точке на Земле. На одном и том же меридиане, например, на меридиане Сингапура, восход Солнца будет происходить в одно и тоже время.

Наблюдатель в самолёте находится выше, чем наблюдатель на Земле. Для такого наблюдателя восход Солнца наступит раньше, так как наблюдатель на самолёте может заглянуть под горизонт наблюдателя, находящегося на поверхности Земли. Величина угла, на который может заглянуть под горизонт наблюдатель на самолёте — это величина понижения горизонта для него.



$$\alpha = \arccos\left(\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}\right) = \arccos\left(\frac{6400}{6410}\right) = 3.2°.$$

Обратим внимание, что дата события — весеннее равноденствие, когда склонение Солнца равно нулю, а значит, восход Солнца происходит в точке востока. Для наблюдателя, расположенного на экваторе, в том числе и в Сингапуре, суточный путь Солнца перпендикулярен горизонту. Следовательно жители Сингапура увидят восход, когда Солнце пройдёт 3.2°. Найдём время, за которое Солнце проходит $\alpha = 3.2°$. Поскольку на 1° Земля поворачивается за 4 минуты, то

$$\Delta t = 3.2° \times 4^m = 12^m 48^s.$$

Критерии проверки

1. Понимание причины, почему восход произойдёт в разное время **1 балл**
2. Нахождение величины понижения горизонта **3 балла**

3. Прямое указание, что суточный путь Солнца перпендикулярен горизонту **1 балл**
4. Определение времени **3 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(В. Б. Игнатьев)

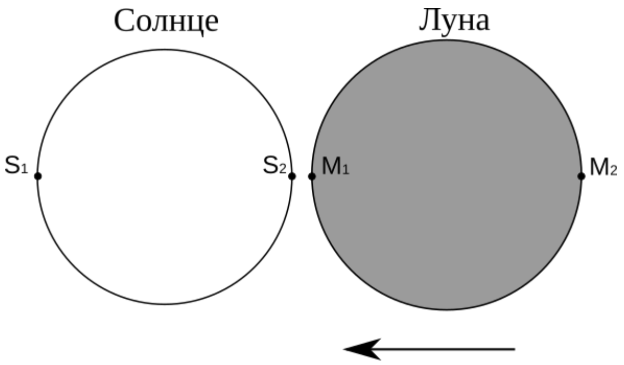
Задача 2

Второе и третье касания солнечного затмения произошли одновременно. Чему может быть равна (линейная) фаза затмения в этот момент?

Подсказка. Пусть $\rho_{\text{с}}$ и $\rho_{\text{л}}$ — угловые радиусы дисков Солнца и Луны соответственно, а δ — угловое расстояние между их центрами. Тогда фазой затмения называется

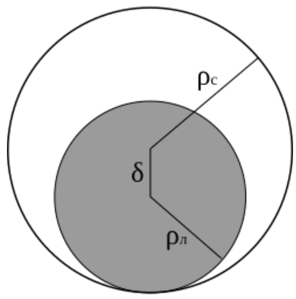
$$\Phi = \frac{\rho_{\text{с}} + \rho_{\text{л}} - \delta}{2\rho_{\text{с}}}.$$

Решение. Для начала разберёмся с терминами. Для простоты рассмотрим центральное затмение, подразумевая, что для нецентрального затмения понятие «касания» можно определить сходным образом. Обозначим точки на диске Луны: $\mathrm{M_1}$ располагается на переднем краю лунного диска и первой заходит на диск Солнца, а $\mathrm{M_2}$ — на заднем краю так, чтобы последней с него сойти. Аналогичным образом обозначим на краю солнечного диска две точки $\mathrm{S_1}$ и $\mathrm{S_2}$ (см. рисунок).



Первым касанием называется момент, когда совмещаются точки $\mathrm{M_1}$ и $\mathrm{S_2}$, вторым — точки $\mathrm{M_1}$ и $\mathrm{S_1}$, третьим — $\mathrm{M_2}$ и $\mathrm{S_2}$ и, наконец, четвёртым — точки $\mathrm{M_2}$ и $\mathrm{S_1}$. Между первым и вторым, а также между третьим и четвертым касаниями происходит частное затмение, а между вторым и третьим — полное или кольцеобразное. Зная это, можно дать ответ: если одновременно совпали точки $\mathrm{M_1}$ и $\mathrm{S_1}$, а также $\mathrm{M_2}$ и $\mathrm{S_2}$, то диски Луны и Солнца имеют одинаковые размеры, их центры совпадают, а значит, фаза затмения в точности равна 1.

Можно привести ещё один вариант достаточно тривиального решения для касательного затмения. Посмотрим на рисунок и представим, что лунный диск меньше солнечного, тогда, чем дальше центр лунного диска от центра солнечного, тем меньше времени проходит от второго до третьего касаний. Это время уменьшится до нуля, когда лунный диск коснётся солнечного изнутри (см. рис). Чему же равна фаза в этот момент?



Для того чтобы фаза была минимальная, необходимо, чтобы размер солнечного диска был максимальным, а лунного — минимальным. Максимального размера диск Солнца достигает в момент прохождения Землей перигелия, т. е.

$$\rho_{\text{с, max}} = \frac{2 \times 697\,000\,\text{км}}{1.496 \times 10^8(1 - 0.0167)} \times 3438 = 32.58'.$$

Аналогично, минимальный размер лунного диска достигается при положении Луны в апогее:

$$\rho_{\text{л, max}} = \frac{2 \times 1738}{406\,700} \times 3438 = 29.38'.$$

При внутреннем касании расстояние между центрами максимального Солнца и минимальной Луны составит $\delta = \rho_\text{с} - \rho_\text{л}$, откуда

$$\Phi = \frac{\rho_\text{л}}{\rho_\text{с}} \approx 0.9.$$

Очевидно, что при больших фазах вплоть до единицы при кольцеобразных затмениях эта ситуация может повториться. Но и при полных касательных затмениях эта ситуация повторяется. Однако при использовании данного в условии способа определения фазы затмений фаза полного касательного затмения всегда равна единице. Отсюда окончательный ответ:

$$\Phi \in [0.9, 1].$$

Критерии проверки

1. Решение при совпадении угловых размеров Солнца или Луны	**1 балл**
2. В этом случае фаза $\Phi = 1$	**1 балл**
3. Рассмотрен вариант касательного кольцеобразного затмения	**1 балл**
4. Вычисление угловых размеров Солнца и Луны для крайнего случая	**по 1 баллу**
5. Минимальная фаза $\Phi = 0.9$	**1 балл**
6. Показано, что возможны все фазы от 0.9 до 1	**2 балла**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 3

Две звезды с массами 1 $M_\odot$ и 1.3 $M_\odot$ вращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам с периодом 1 год. Первая звезда полностью похожа на Солнце, а вторая — белый карлик с радиусом 10 000 км. Определите угловые размеры обеих звёзд в угловых секундах для наблюдателя, находящегося в центре масс.

Решение. Рассмотрим задачу в системе отсчёта центра масс. Первая звезда двигается вокруг центра масс по окружности с радиусом a_1 и периодом $T = 1$ год. Вторая звезда двигается вокруг центра масс по окружности с радиусом a_2 и периодом $T = 1$ год. Суммарная полуось такой двойной системы $a = a_1 + a_2$.

Найдём по третьему закону Кеплера большую полуось такой орбиты:

$$\frac{T^2}{T_\oplus^2} \cdot \frac{M_1 + M_2}{M_\odot} = \frac{a^3}{a_\oplus^3}$$

$$a = a_\oplus \sqrt[3]{T^2 \cdot \frac{M_1 + M_2}{M_\odot}} = a_\oplus \sqrt[3]{1^2 \times \frac{1M_\odot + 1.3M_\odot}{M_\odot}} = 1.32\,\text{а.е.}$$

Положение центра масс на оси X можно определить с помощью известного выражения $x_{\text{ц.м.}} = \frac{M_1x_1+M_2x_2}{M_1+M_2}$. Поместим начало координат в центр масс. Тогда можно записать

$$M_1a_1 = M_2a_2,$$

Подставив $a_1 = a - a_2$ из первого утверждения, получим:

$$M_1a - M_1a_2 = M_2a_2$$

$$a_2 = \frac{M_1a}{M_2 + M_1} = \frac{1.34M_\odot}{M_\odot + 1.4M_\odot} = 0.57\,\text{а.е.}$$

Расстояние первой звезды от центра масс равно

$$a_1 = a - a_2 = 0.75\,\text{а.е.}$$

Теперь найдём угловые размеры звёзд:

$$p'' = 206\,265''/\text{рад} \cdot \frac{D}{a}$$

$$p_1'' = 206\,265 \times \frac{2 \times 697\,000\,\text{км}}{0.82\,\text{а.е.} \times 1.5 \times 10^8\,\text{км/а.е.}} \approx 2580'' \approx 43',$$

$$p_2'' = 206\,265 \times \frac{2 \times 10\,000\,\text{км}}{0.56\,\text{а.е.} \times 1.5 \times 10^8\,\text{км/а.е.}} = 48''.$$

Критерии проверки

1. Определение большой полуоси системы a **2 балла**
2. Запись уравнения для центра масс **1 балл**

3. Определение радиусов орбит двух звёзд a_1 и a_2 **по 1 баллу**
4. Запись формулы для углового размера **1 балл**
5. Определение угловых размеров(диаметров!) звёзд **по 1 баллу**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(В. Б. Игнатьев)

Задача 4

Студент-астроном проводит визуальные наблюдения за двойными звёздами в студенческой обсерватории МГУ в рефракторе Цейсс-300 (диаметр объектива 250-мм, относительное отверстие 1:3.8). После наблюдений он решил навести телескоп на звезду главного здания МГУ (диаметр 7.5 м). На сколько миллиметров ему надо сдвинуть фокус окуляра и в какую сторону? Помогите ему определить фокусное расстояние окуляра, в котором звезда займёт все поле зрения целиком.

Расстояние от телескопа до Главного здания МГУ — 750 метров. Поле зрения окуляра — 60°.

Решение. Рассмотрим **первый вопрос** задачи. Обычно телескопы наводятся на астрономические объекты, которые удалены от нас на огромные расстояния. По условию задачи студент вначале наблюдал за астрономическим объектом, а после навел телескоп на объект, который находится вблизи. Запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f},$$

где F — это фокусное расстояние линзы, d — расстояние от объекта до линзы, f — расстояние от линзы до построенного изображения. Обратим внимание, что при наблюдении астрономических объектов d стремится к бесконечности, следовательно, $f = F$. То есть изображение строится в фокальной плоскости. Определим f при наблюдении за звездой главного здания МГУ:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{d} = \frac{d}{dF} - \frac{F}{dF} = \frac{d-F}{dF}$$

Согласно условиям, фокусное расстояние телескопа $F = 3.8 \cdot D = 3.8 \cdot 0.25\,\text{м} = 0.95\,\text{м}$. Тогда расстояние от центра линзы до изображения будет равно:

$$f = \frac{dF}{d-F} = \frac{750 \cdot 0.95}{750 - 0.95} = 0.9512\,\text{м}.$$

Это означает, что фокальную плоскость окуляра нужно <u>отодвинуть</u> от линзы на расстояние $0.9512 - 0.95$ метра. Это будет 0.0012 метра или 1.2 мм.

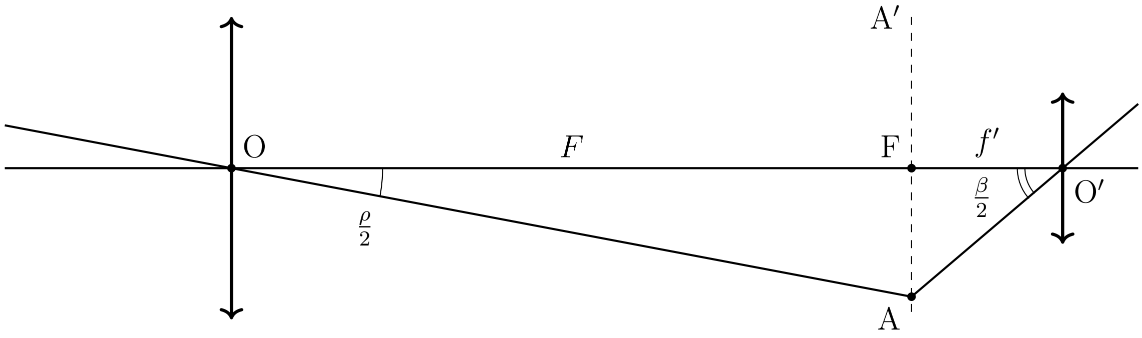
Перейдём ко **второму вопросу** задачи. Определим угловой размер звезды на шпиле главного здания МГУ.

$$\rho'' = \frac{206265D}{L},$$

где D — это диаметр звезды 7.5 метров, а L — это расстояние до звезды 750 метров.

Подставляем значения:

$$\rho'' = \frac{206265D}{L} \approx 2063'' = 34.4' = 0.57°.$$



Рассмотрим ход лучей в телескопе. Луч, идущий вдоль оптической оси телескопа, пройдёт через центры объектива O и окуляра O′ по прямой, пересекая фокальную плоскость в точке F. Луч, идущий от края звезды под углом $\frac{\rho}{2}$, пройдя через точку O, пересечёт фокальную плоскость в точке A. Эта точка видна из окуляра под углом $\frac{\beta}{2}$. Отрезок OF равен фокусному расстоянию объектива F, а отрезок FO′ — фокусному расстоянию окуляра f'. Здесь правильнее вместо фокусного расстояния F использовать найденную нами ранее величину f, но поскольку эти величины практически не отличаются, то будем и далее использовать величину F.

Из треугольников OFA и O′FA получаем

$$F \operatorname{tg}(\rho/2) = f' \operatorname{tg}(\beta/2).$$

Здесь угол $\beta = 60^\circ$ — поле зрения окуляра. Обратим внимание, что угол $\beta/2$ достаточно велик, чтобы пользоваться упрощённой формулой для малых углов. Все величины нам известны, поэтому найдём фокусное расстояние окуляра:

$$f' = F \frac{\operatorname{tg} \rho/2}{\operatorname{tg} \beta/2} \approx 0.0082\,\text{м} = 8.2\,\text{мм}.$$

Для справки приведём ответ, который получился бы при использовании формулы малых углов:

$$f' = F \frac{\rho}{\beta} \approx 9.0\,\text{мм}.$$

Критерии проверки

1. Вычисление фокусного расстояния объектива **1 балл**
2. Правильное использование ур-я тонкой линзы (1 за формулу + 1 за использование) **2 балла**
3. Правильный численный ответ на первый вопрос **1 балл**
4. Правильно указанное направление движения окуляра **1 балл**
5. Определение углового размера звезды **1 балл**
6. Определение фокусного расстояния окуляра **2 балла**
   Если участник использует приближение малых углов, то оценка за этап снижается на 1 балл при правильном вычислении.

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(В. Б. Игнатьев)

Задача 5

В спутник, обращающийся по круговой полярной орбите вокруг Луны на расстоянии 500 км от поверхности, врезался круглый метеороид плотностью 5.0 г/см^3 и застрял в нём. Столкновение произошло «в лоб» в момент, когда спутник находился над северным полюсом Луны, и уже через половину оборота спутник по касательной врезался в южный полюс Луны. Найдите радиус метеороида, если его скорость в момент столкновения была равна 13 км/с относительно Луны, а масса спутника до столкновения составляла 500 кг.

Решение. Спутник двигался по круговой орбите, поэтому его скорость равна

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = 1.48\,\text{км/с}.$$

Здесь M и R — масса и радиус Луны, h — высота спутника над поверхностью Луны, G — гравитационная постоянная. Для того чтобы упасть на Луну по касательной на южный полюс, спутник должен двигаться по эллиптической орбите с периселением, равным радиусу Луны, и апоселением в точке столкновения. Если $r_p = R$ и $r_a = R + h$ — расстояния в периселении и апоселении, то эксцентриситет новой орбиты равен

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{h}{2R + h} \approx 0.126.$$

Тогда скорость после соударения равна

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1-e}{1+e}} = v_0\sqrt{1-e} \approx 1.38\,\text{км/с}.$$

Заметим, что направление скорости спутника в результате столкновения может остаться таким же или поменяться на противоположное. Поскольку метеороид застрял в спутнике, будем считать столкновение абсолютно неупругим. Тогда изменение скорости можно найти из закона сохранения импульса системы спутник-метеороид. Запишем закон сохранения импульса для случая, когда спутник продолжает движение в ту же сторону:

$$m_0 v_0 - mV = (m_0 + m)v,$$

где m_0 — масса спутника, m — масса метеороида, V — скорость метеороида. Тогда масса метеороида равна

$$m = m_0 \frac{v_0 - v}{V + v} \approx 3.3\,\text{кг},$$

а его радиус

$$R = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} \approx 5.4\,\text{см}.$$

Если направление движения спутника меняется на противоположное, то закон сохранения импульса принимает вид

$$m_0 v_0 - mV = -(m_0 + m)v,$$

откуда $m = 123$ кг и радиус $R = 18$ см.

Критерии проверки

1. Нахождение скорости спутника **1 балл**
2. Объяснение, что орбита, по которой падает спутник, — эллипс (может быть показано на рисунке) **1 балл**
3. Нахождение эксцентриситета этого эллипса **1 балл**
4. Указание на то, что столкновение абсолютно неупругое **1 балл**
5. Нахождение скорости после соударения **1 балл**
6. Указание на два случая направления итоговой скорости **1 балл**
7. Радиус метеороида **по 1 баллу**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(А. А. Автаева)

Задача 6

На рисунке представлен разложенный по отдельным кадрам видеофрагмент. Он был получен в средних широтах Земли в день равноденствия. На видеозаписи запечатлён полёт белоголового орлана, длина тела которого (от кончика клюва до конца хвоста) составляет 130 см. Частота следования кадров на видеозаписи была стандартной — 25 кадров/с. Угловой диаметр диска Солнца равен $32'$.

Фотография Zev Hoover, Christian Lockwood, Zoe Chakoian.

1. На каком расстоянии от птицы находилась камера?
2. Чему была равна частота взмахов крыльями?
3. Затмение какого типа наблюдал автор фотографии (дайте подробный ответ с обоснованием)?
4. На какой угловой высоте происходил пролёт орлана по диску небесного тела?

Опишите все сделанные измерения и операции полученными значениями.

h, °	ρ, ′	h, °	ρ, ′	h, °	ρ, ′	h, °	ρ, ′
90	0	30	1.7	5	9.9	2	18.4
70	0.4	20	2.6	4	11.8	1	24.7
50	0.8	10	5.3	3	14.4	0	35.4

h — Видимая (искажённая рефракцией) высота в градусах, ρ — величина рефракции в угловых минутах.

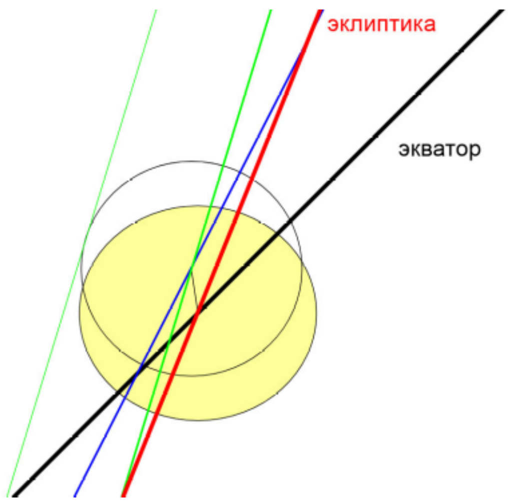
Решение. 1. Мы видим, что по мере пролёта орлана через поле зрения камеры его угловые размеры не изменялись. Поэтому будем считать, что он летит перпендикулярно лучу зрения, попадающего в центр кадра. Для определения расстояния до птицы нам требуется знать её угловые размеры. На записи запечатлён какой-то момент солнечного затмения. Видно, что изображение Солнца сплюснуто по вертикали (это действие атмосферной рефракции). Таким образом, в качестве «линейки» мы можем использовать горизонтальный диаметр солнечного изображения.

Подсчитаем, сколько раз птица помещается на диаметре диска Солнца. Получаем примерно 17 раз, а значит, угловой размер одного изображения птицы равен $r = 32'/17 \approx 113''$. Под таким углом птица длиной $l = 130$ см будет видна с расстояния

$$L = l/r = 1.3/(113/206\,265) \approx 2400\,\text{м}.$$

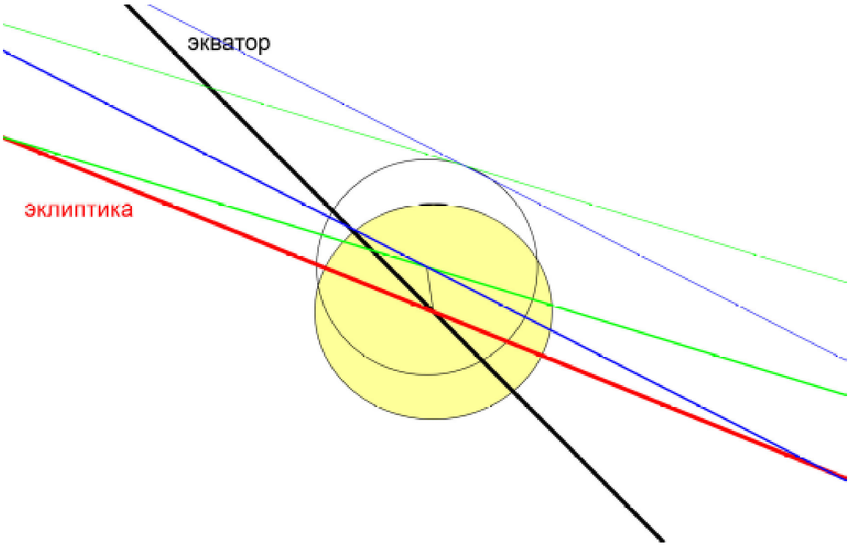
2. Частота следования кадров на видеозаписи равна 25 Гц (25 кадров в секунду). Хорошо видно, что между положениями крыльев птицы, находящимися в одинаковой фазе (например, максимально поднятыми), проходит 10 кадров. Это число можно получить несколько раз, подсчитав его на разных промежутках траектории птицы, или подсчитав число изображений птицы между крайним левым и крайним правым её изображениями, видимыми на рисунке. Это означает, что частота взмахов крыльями птицы в 10 раз меньше частоты следования кадров, т.е. она равна 2.5 Гц.

3. Мы наблюдаем солнечное затмение низко над горизонтом (см. п. 4 решения) во время равноденствия. При этом Солнце или восходит, или заходит. Нарисуем рисунок для случая восхода на широте 45° (это будет и углом между экватором и горизонтом в точке востока) в день осеннего равноденствия:



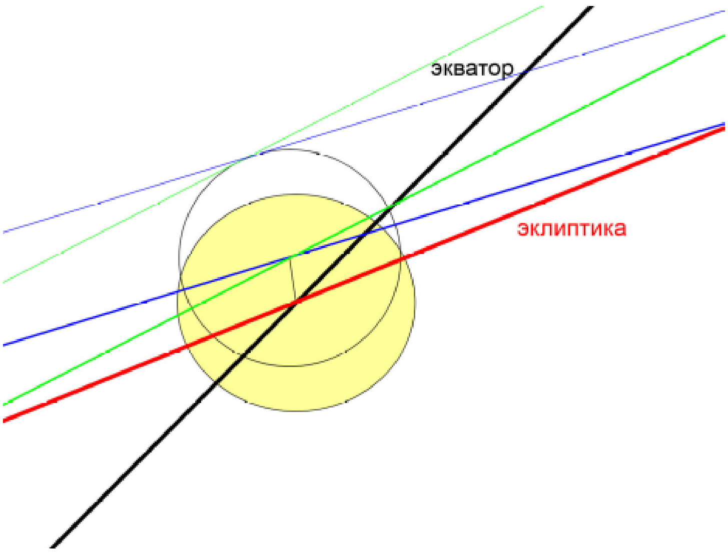
Чтобы отметить положения дисков небесных тел, мы провели на фотографии соответствующие сплюснутые окружности. Орбита Луны наклонена к плоскости эклиптики примерно на 5°, т. е. на рисунке она лежит между крайними её положениями, отмеченными синей и зелёной линиями, проходящими через центр диска Луны. Синяя линия пересекает эклиптику выше точки равноденствия, зелёная — ниже. И Солнце, и Луна относительно точки равноденствия движутся вниз на рисунке. Скорость движения Луны более, чем в 10 раз выше, чем у Солнца, поэтому будем считать диск Солнца неподвижным. Из построения видно, что касания Солнца левым краем диска Луны не произойдёт — затмение будет частным.

Нарисуем рисунок для случая захода в день осеннего равноденствия:



Обозначения на рисунке такие же, и из построения видно, что касания Солнца правым краем диска Луны не произойдёт — затмение будет частным.

Нарисуем рисунок для случая восхода в день весеннего равноденствия:

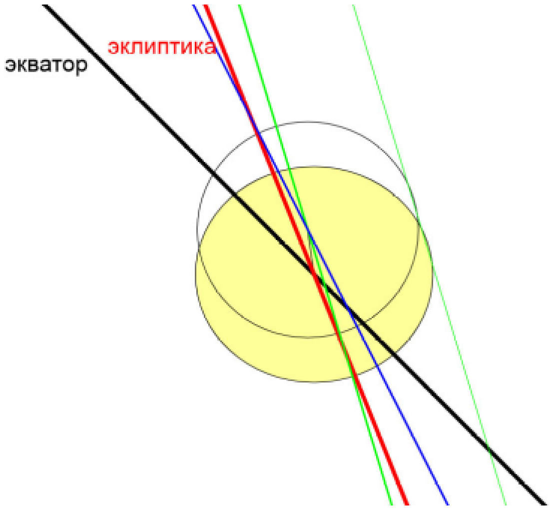


Обозначения на рисунке такие же, и из построения видно, что касания Солнца правым краем диска Луны не произойдёт — затмение будет частным.

Рассмотрим рисунок для случая захода Солнца в день весеннего равноденствия.

Обозначения на рисунке такие же, и из построения видно, что касание правых краёв дисков потенциально возможно (и в этом случае оно произошло ранее момента наблюдения), однако точность нашего построения не позволяет утверждать это однозначно. Из-за того, что Луна имеет меньший угловой размер, чем Солнце, может наблюдаться кольцеобразное солнечное затмение.

Таким образом, вероятнее всего, что затмение было частным, однако существует некоторая вероятность того, что оно было кольцеобразным.



4. На изображении хорошо заметна сплюснутость диска Солнца, вызванная атмосферной рефракцией. Измерим максимальный диаметр диска Солнца на изображении, найдём центр диаметра и измерим расстояние от него до крайней нижней точки диска. Вне атмосферы отношение диаметра и радиуса должно быть равно 2. У нас получилось отношение примерно 2.15. При угловом диаметре диска Солнца в $32'$ это даёт угловой радиус, искажённый рефракцией, равный $14.9'$. Значит рефракция «съела» $1.1'$.

Рефракция поднимает над горизонтом как центр диска Солнца, так и его нижний край, но нижний край она поднимает сильнее, т.к. он имеет на $16'$ большее зенитное расстояние. Отсюда становится понятным, что нам надо найти ту высоту, при которой разница в $16'$ даст разницу в эффекте в $1'$.

Обратимся к таблице. Посчитав разности углов рефракции на соседних высотах, обнаружим, что для высот 2° и 3° она составляет $4'$. Тогда разность высот в 0.25° даст требуемую разность углов рефракции $1'$. Значит, орлан летел на высоте около 2.5°.

Ответ: 1) 2.4 км, 2) 2.5 Гц, 3) частное солнечное затмение, 4) примерно 3°.

Критерии проверки

1. Ответ на первый вопрос в диапазоне 2.2 — 2.6 км при условии верного решения **3 балла**

   Если для измерения угловых размеров птицы использовалось сравнение одной тушки с диском Солнца, то оценка снижается на 2 балла даже при верном ответе.

   Если при верном подходе к решению ошибка в ответе вызвана ошибкой в измерениях, то оценка снижается на 2 балла.

2. Ответ на второй вопрос в диапазоне 2.2 — 2.9 Гц при условии верного решения **3 балла**

   Если для определения частоты использовалось одно измерение расстояния (в тушках) между ближайшими одинаковыми фазами (т.е. не проводилось ни усреднение нескольких значений, ни измерения на максимально возможном интервале), то оценка снижается на 1 балл.

   Если при верном подходе к решению ошибка в ответе вызвана ошибкой в измерениях, то оценка снижается на 2 балла.

3. Ответ на вопрос 3 оценивается не более чем в **2 балла**

При оценивании этого пункта следует принять во внимание:
ответ о том, что наблюдается частная фаза солнечного затмения, оценивается в 1 балл;
ответ о том, что наблюдается частная фаза частного солнечного затмения с объяснением, почему это не может быть полное солнечное затмение, оценивается в 2 балла;
указание на то, что затмение было кольцевым, оценивается в 1 балл;
если представлено доказательство возможности этого, кроме того, что угловые размеры Луны меньше солнечных, ставится 2 балла.

Ответ о том, что наблюдается частная фаза солнечного затмения без объяснения, — 1 балл.

4. Указание на сплюснутость диска Солнца как на результат действия атмосферной рефракции **1 балл**

5. Верное вычисление сплюснутости с ответом (в зависимости от способа может быть получено как отношение диаметра к радиусу 2.1–2.3, так и сразу величина сплюснутости 1-2’) **1 балл**

6. Верное определение высоты (от 1° до 4° — в зависимости от найденной ранее величины сплюснутости) **2 балла**

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

(А. М. Татарников)