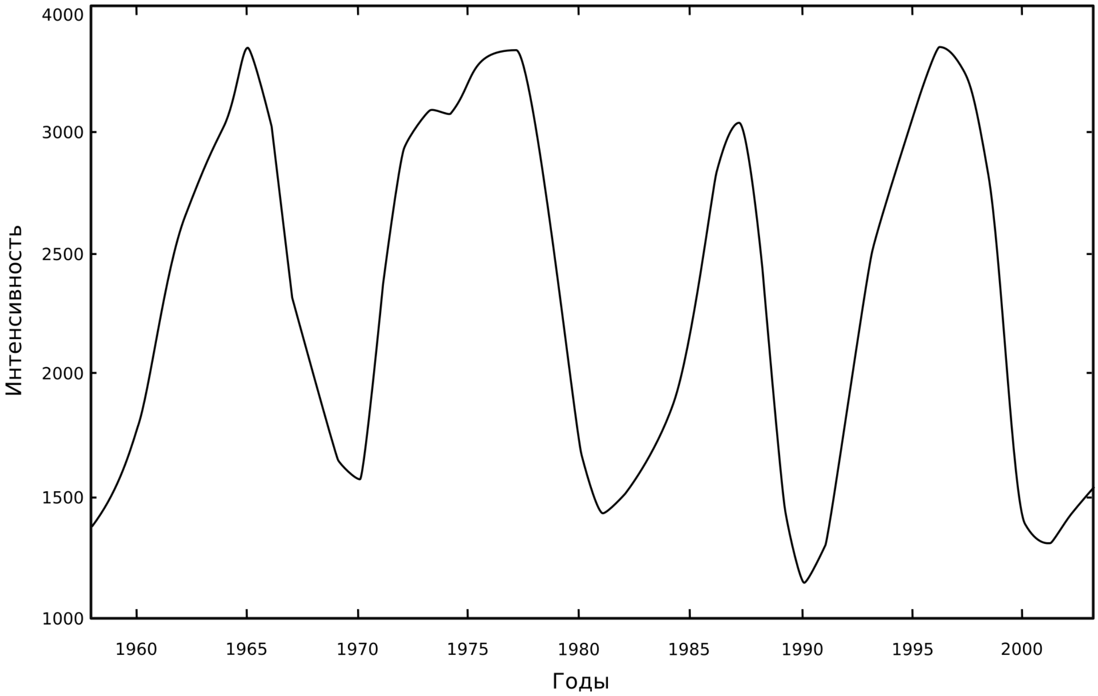
LXXVII Московская астрономическая олимпиада (2023 г.)

Теоретический тур. Решения и критерии оценивания

11 класс

Задача 1

На графике показана зависимость интенсивности (частиц на см^2 в секунду со стерадиана) галактических космических лучей с энергией выше 100 МэВ от времени на Земле. Объясните причину переменности. Когда наблюдаются минимумы, а когда — максимумы интенсивности?



Решение. Галактические космические лучи (ГКЛ), как ясно из названия, приходят в Солнечную систему извне. Основная составляющая комических лучей — это протоны высоких энергий. Возникают они в разных местах нашей галактики, но, двигаясь сквозь неё, взаимодействуют с магнитными полями, что приводит к полному запутыванию их траекторий. В итоге частицы приходят в солнечную систему изотропно. Поэтому переменность на графике не может быть связана с переменностью какого-либо одного источника ГКЛ.

Можно заметить, что минимумы (или максимумы) повторяются с периодом (не строгим) чуть больше 10 лет. В Солнечной системе есть похожий период — 11-летний период солнечной активности. В периоды максимума активности в атмосфере Солнца появляется большое число активных образований, которые приводят к усилению солнечного ветра, который, в свою очередь, взаимодействует с галактическими космическими лучами (ГКЛ) и препятствует проникновению их внутрь Солнечной системы. Поэтому максимумы интенсивности ГКЛ наблюдаются во время минимумов солнечной активности, а минимумы интенсивности, наоборот — во время макимумов активности.

Солнечный ветер мало препятствует ГКЛ с высокой энергией, но их число сравнительно невелико и не вносит решающего вклада в этот график.

Критерии проверки

1. Замечена связь с периодом солнечной активности **1 балл**
2. Показано, что солнечная активность препятствует ГКЛ **3 балла**

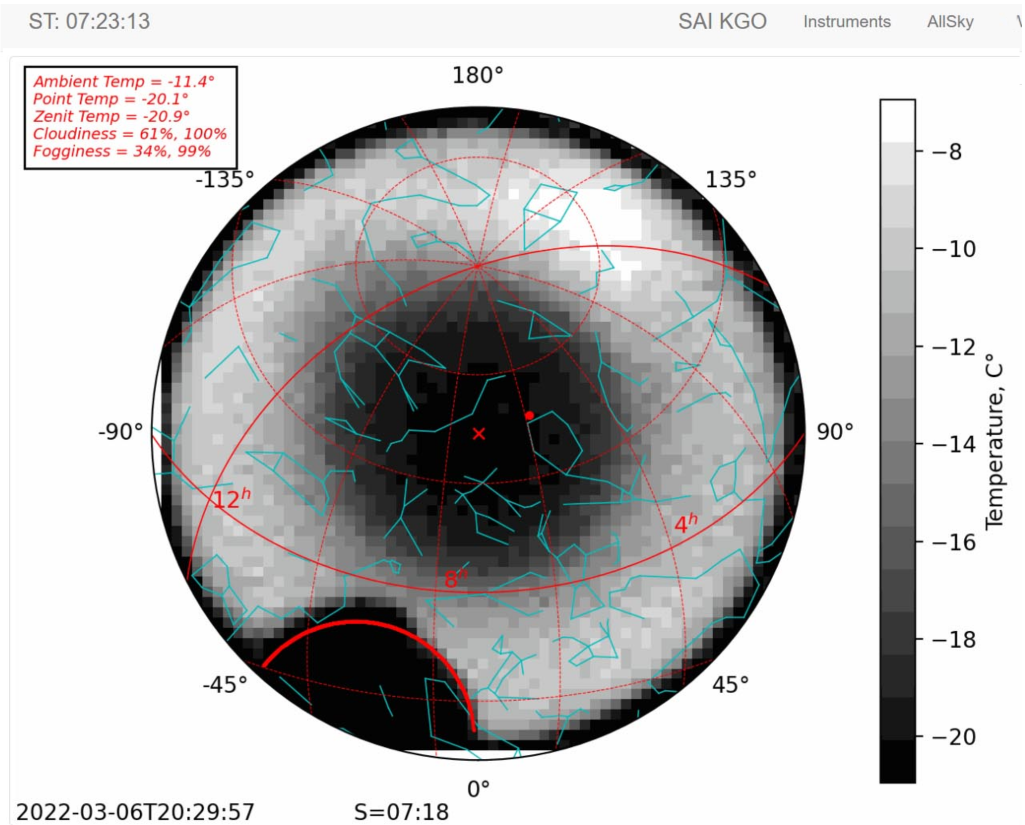
   За противоположный вывод, что солнечный ветер добавляет отсчётов во время максимумов, выставляется 2 балла за всю задачу.

Максимальная оценка за задачу **4 балла**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 2

На Кавказской горной обсерватории ГАИШ МГУ для мониторинга облачности установлен специальный прибор, который измеряет температуру разных участков неба и выводит на экран её распределение по небесной сфере. Облака имеют более высокую температуру, чем чистое небо, поэтому их легко увидеть в инфракрасном диапазоне: чем плотнее облака, тем ярче они в этом диапазоне длин волн. В один из дней в течение нескольких часов прибор демонстрировал распределение яркости схожее с кольцом, показанное на приложенном рисунке. Чёрное пятно внизу изображения между 0 и -45 азимутами — купол телескопа. Объясните наблюдаемую картину.



Решение. Распределение температуры облаков на рисунке может соответствовать либо распределению именно температуры плотных облаков (и тогда они должны быть расположены вокруг обсерватории по кольцу, что маловероятно, принимая во внимание, что такая картина наблюдалась несколько часов), либо распределению количества излучающей в ИК-диапазоне материи.

Под второй вариант подходит тот случай, когда небо над прибором затянуто равномерно — количество излучающего вещества будет набираться просто за счёт увеличения воздушной массы с увеличением зенитного расстояния. Плотные непрозрачные облака или туман не могут создать такую картину, поскольку в таком случае равномерно светилось бы всё небо.

Остаётся вариант с равномерным слоем полупрозрачного тумана: в околозенитной области он позволяет нам видеть холодное небо лишь, слегка «подогретое» излучением тумана. По мере роста зенитного расстояния увеличивающийся путь сквозь слой тумана приносит всё больше ИК-квантов света, которые и рождают эффект кольца.

Критерии проверки
Объяснение с указанием на то, что наблюдаемая картина может быть получена от полупрозрачного (в оптическом или ИК диапазонах длин волн) равномерного слоя облачности или тумана, оценивается от 0 до 4 баллов. При наличии дополнительных (к верному) объяснений оценка снижается в зависимости от степени некорректности дополнительных объяснений на 1–3 балла.

Некоторые варианты ответов и их оценивание:
1. Эффект связан с ориентацией прибора **0 баллов**
2. Кольцо из облаков, а в середине ясное небо **0 баллов**
3. На горе лежит сплошное облако, но в центре оно «протыкается» горой **1 балл**
4. Мы видим тёплый слой воздуха у поверхности **1 балл**
5. Явно замечена связь, что луч света дольше взаимодействует со средой при увеличении зенитного расстояния, но дано неверное объяснение эффекта **2 балла**

Максимальная оценка за задачу **4 балла**.

(А. М. Татарников)

Задача 3

Наблюдатель, находящийся в верхних слоях атмосферы Юпитера, заметил, что некоторая удалённая звезда в течение юпитерианского дня движется по эллипсу с большей полуосью $\alpha_0 = 5.1''$. Оцените длительность восхода Солнца для этого наблюдателя. Орбиту Юпитера считайте круговой, разницей экваториального и полярного радиусов, а также дифференциальным вращением Юпитера пренебрегите, атмосферные эффекты не учитывайте.

Решение. Сравнивая величину годичного и суточного аберрационного смещений, приходим к выводу о пренебрежимо малом значении годичной аберрации в сравнении с суточной. Суточный (как и годичный) параллакс в течение одного периода вращения Юпитера также, очевидно, никакого влияния не оказывает.

Угол аберрации равен $\alpha = \frac{v}{c}\cos\theta'$, где v — скорость движения наблюдателя, c — скорость света, θ' — угол между направлением движения наблюдателя и направлением на звезду в системе отсчёта наблюдателя. Поскольку направление скорости наблюдателя со временем изменяется на 360°, в течение суток любая звезда на небе дважды оказывается под углом $\theta' = 90°$, а значит, большая полуось аберрационного эллипса соответствует максимально возможному значению при $\cos\theta' = 1$. Для наблюдателя на Юпитере формула аберрации принимает вид:

$$\alpha = \frac{2\pi R_{♃} \cos\varphi}{T_{♃} c}.$$

Здесь $R_{♃}$ и $T_{♃}$ — радиус и период вращения Юпитера, φ — широта пункта наблюдений. Отсюда находим широту наблюдателя на Юпитере:

$$\varphi = \arccos\frac{\alpha T_{♃} c}{2\pi R_{♃}} \approx 53^\circ.$$

Юпитер находится в 5.2 раза дальше от Солнца, чем Земля. Поэтому угловой размер Солнца для наблюдателя также в 5.2 раза меньше, чем на Земле: $\delta_\odot = 32'/5.2 \approx 6.2'$. Тогда, учитывая малость угла наклона экватора Юпитера к плоскости его орбиты, а также огромный (по меркам звёздных суток) период обращения Юпитера, искомое время восхода составит

$$\tau = \frac{\delta_\odot}{360^\circ \cos\varphi} T_{♃} \approx 17\,\text{с}.$$

Критерии проверки

1. Указание (возможно не явное, но ясное из хода решения) на то, что смещение звезды происходит вследствие суточной аберрации **1 балл**
2. Запись формулы для угла аберрации **1 балл**
3. Запись формулы, связывающей большую полуось аберрационного эллипса с широтой наблюдателя на Юпитере **1 балл**
4. Определение углового размера Солнца на Юпитере **1 балл**
5. Формула, связывающая длительность восхода и широту наблюдателя **2 балла**

   Если в этой формуле перепутан угловой радиус Солнца с диаметром, забыт $\cos\varphi$, то оценка за неё уменьшается на 1 балл.
6. Итоговый ответ. Выставляется только при верном численном значении **1 балл**

7. Обоснование сделанных приближений — в работе должно присутствовать указание на: малость склонения Солнца на Юпитере в виду малого угла наклона его экватора к плоскости его орбиты, малость отличия звёздных суток от солнечных на Юпитере, малость влияния параллактического суточного и годичного смещений, малость влияния аберрационного годичного смещения **1 балл**

   Если в решении не учитывается аберрация, максимальная оценка за задачу не может превышать 3 баллов (критерии 4 и 5 оцениваются полностью при условии отсутствия грубых физических ошибок).

   Если звезда считается спутником Юпитера, ставится 0 баллов.

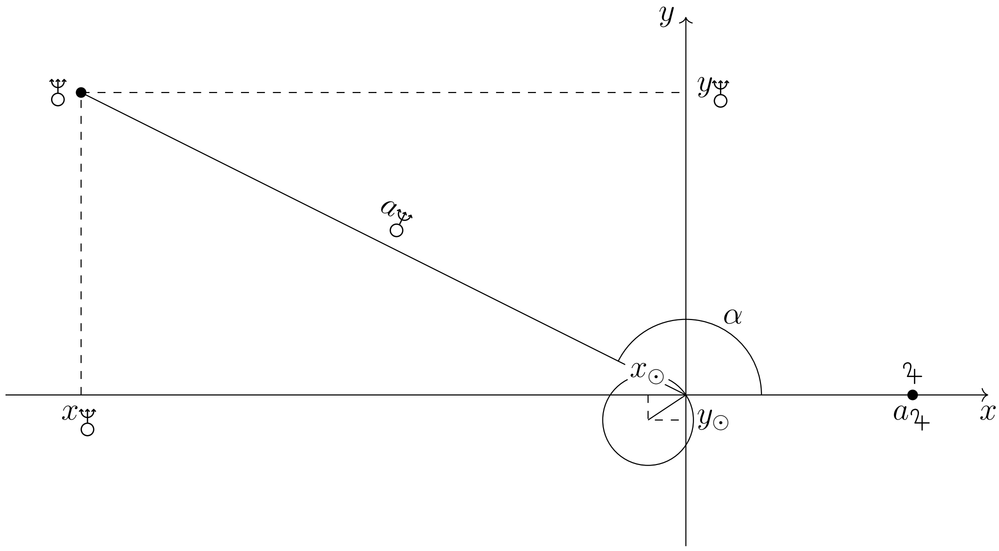
Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(А. М. Ажакин)

Задача 4

Предположим, что в Солнечной системе остались только Земля, Юпитер, Нептун и Солнце, причём планеты движутся вокруг центра масс по круговым орбитам с радиусом, равным их текущей большой полуоси. Оцените, с какой вероятностью можно обнаружить центр масс Солнечной системы вне Солнца в случайный момент времени в течение ближайших 10 тыс. лет, если орбиты всех тел лежат в одной плоскости.

Решение. Ясно, что Земля практически никакого влияния на положение центра масс оказывать не будет — это значит, что её присутствие в задаче можно не учитывать.



Перейдём во вращающуюся систему отсчёта (относительно центра масс), в которой Юпитер покоится. В этой системе отсчёта введём ось, соединяющую центр масс Солнечной системы и Юпитер. Кроме того, обозначим координату Нептуна вдоль этой оси за $x_{♆}$, а в перпендикулярном направлении — за $y_{♆}$. Аналогично, $x_{\odot}$ и $y_{\odot}$ — центра Солнца. Тогда модули координат Солнца относительно такой системы отсчёта найдутся из следующих равенств:

$$-M_{♃}a_{♃} - M_{♆}x_{♆} = M_{\odot}x_{\odot},$$

$$-M_{♆}y_{♆} = M_{\odot}y_{\odot}.$$

К этим уравнениям следует добавить $x_{♆}^2 + y_{♆}^2 = a_{♆}^2$. Здесь $a_{♆}$ и $a_{♃}$ — радиусы орбит Нептуна и Юпитера. Условие, при котором центр масс оказывается на границе Солнца:

$$x_{\odot}^2 + y_{\odot}^2 = R_{\odot}^2$$

Решаем данную систему относительно $x_{♆}$. Для этого первые два уравнения возведём в квадрат, сложим и выразим $x_{♆}$:

$$x_{♆} = \frac{(M_{♃}a_{♃})^2 + (M_{♆}a_{♆})^2 - (M_{\odot}R_{\odot})^2}{2M_{♃}M_{♆}a_{♃}} \approx 10.6\,\text{а.е.}$$

Мы получили, что Нептун должен находиться по другую сторону от Юпитера относительно центра масс. В этом нетрудно убедиться, рассмотрев систему Солнце-Юпитер: в ней центр масс всегда расположен вне Солнца.

Граничный угол Нептун-центр масс-Юпитер α:

$$\alpha = 90^\circ + \arcsin\frac{10.6}{30.1} \approx 111^\circ$$

Тогда искомая вероятность η:

$$\eta = \frac{2\alpha}{360^\circ} \approx 0.6$$

Обратим внимание, что ответ сильно зависит от использованных масс Солнца, Юпитера и Нептуна, а также значений их больших полуосей и радиуса Солнца.

Критерии проверки

1. Присутствует указание на возможность пренебречь влиянием Земли на положение центра масс системы (либо верно учтено) **1 балл**
2. Записаны выражения для координат центра масс **по 1 баллу**
3. Записано граничное выражение для ц.м. на границе Солнца **1 балл**
4. Получены предельные значения координат Нептуна/Юпитера, при которых центр масс оказывается вне/внутри Солнца **1 балл**
5. Найден предельный угол α **1 балл**
6. Записано выражение для искомой вероятности **1 балл**
7. Получено верное численное значение итоговой вероятности **1 балл**

   В случае, если участник не учитывал смещение центра масс в направлении перпендикулярном линии Солнце-Юпитер, и обосновал это приближение, не засчитывается только 1 балл по критерию 2 — запись выражения для координаты y центра масс. Итоговая оценка при условии верного выполнения остальных этапов решения составляет 7 баллов. В случае, если обоснование отсутствует, не засчитывается также балл за итоговый численный ответ, и итоговая оценка при условии верного выполнения остальных этапов решения составляет 6 баллов.

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(А. М. Ажакин)

Задача 5

Один астроном очень хотел увидеть Большой Юпитер в свой не очень большой телескоп ($D =$ 100 мм, $f/8$). Так как окуляр у него уже был ($f = 15$ мм), он решил увеличить эквивалентное фокусное расстояние телескопа. Как известно, для этого можно использовать линзу Барлоу — рассеивающую линзу, устанавливаемую чуть ближе к объективу, чем фокальная плоскость телескопа. Строение корпуса окуляра позволяет удобно закрепить эту линзу на расстоянии 30 мм от линзы самого окуляра. Найдите оптическую силу необходимой линзы Барлоу и расстояние от неё до фокальной плоскости, если астроном хочет увидеть Юпитер с угловым диаметром в 2°, в 4 раза больше, чем у Луны! Все линзы считать тонкими, а Юпитер — находящимся в противостоянии.

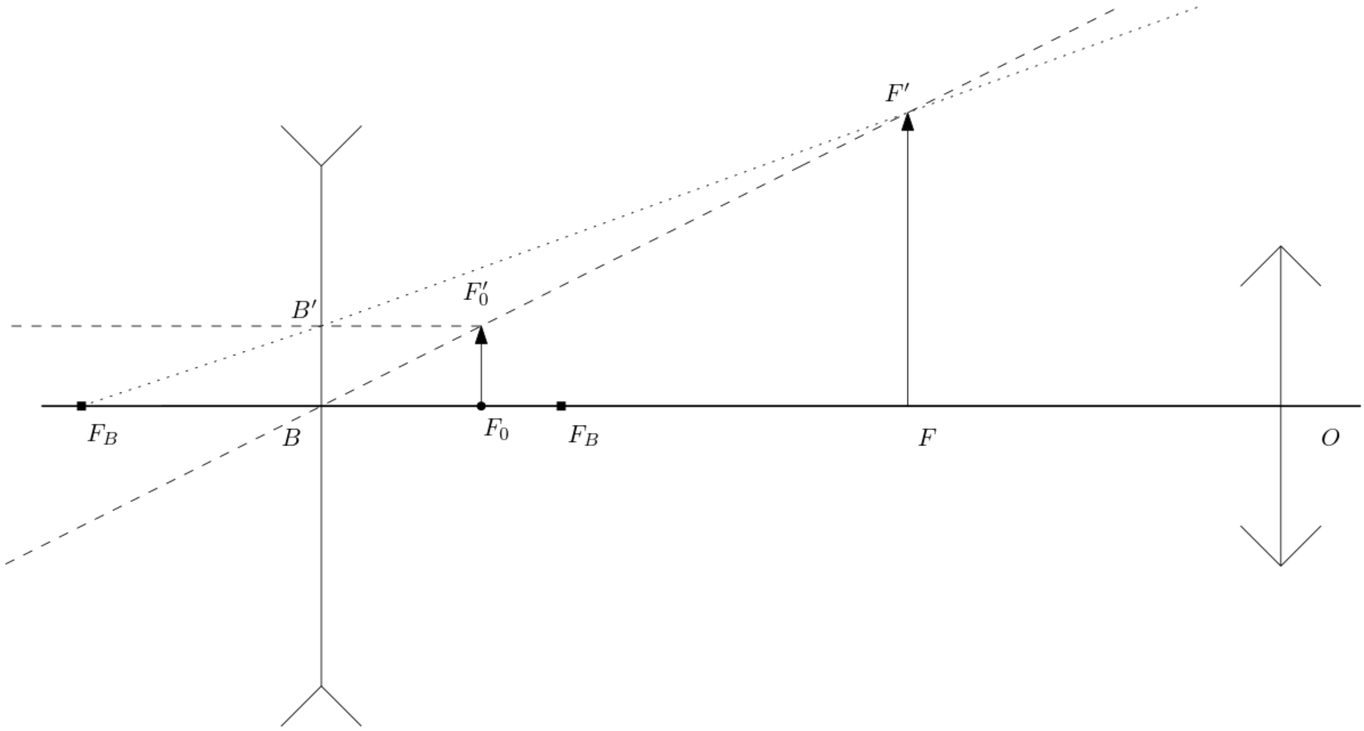
Решение. Для начала определим требуемое увеличение телескопа. Рассчитаем видимый угловой диаметр Юпитера, находящегося в противостоянии.

$$\alpha = \frac{2 \times 70\,000\,\text{км}}{5.2\,\text{а.е.} - 1\,\text{а.е.}} \approx 45''.$$

Необходимый угловой диаметр Юпитера — $\beta = 2°$, можно считать малым углом. Таким образом, требуемое увеличение:

$$\Gamma = \frac{\beta}{\alpha} = 160 \text{ крат}.$$

Увеличение же телескопа, получаемое с имеющимся окуляром — $\Gamma' = \frac{F}{f} = 53.3$ раза, где $F = 800\,\text{мм}$ — фокусное расстояние телескопа, полученное из диаметра и относительного отверстия. Таким образом, линза Барлоу должна увеличить увеличение телескопа, или, более правильно будет сказать, эквивалентное фокусное расстояние телескопа, в 3 раза.



Изображение оптической схемы можно увидеть на рисунке. BB' — линза Барлоу, O — окуляр, F_0F_0' — фокальная плоскость объектива телескопа, FF' — фокальная плоскость телескопа и линзы Барлоу вместе, F_B — фокусы линзы Барлоу. Лучи $B'F_0'$ и BF_0' идут непосредственно от объектива телескопа и без линзы Барлоу сошлись бы в фокальной плоскости F_0F_0'. Однако линза их преломляет, преобразуя в лучи $B'F'$ и BF', сходящиеся в новой фокальной плоскости (луч, проходящий через центр линзы, как обычно, не изменяется).

Нам нужно найти соотношения между расстояниями от линзы Барлоу до старого (BF_0) и нового фокуса (BF), и фокусным расстоянием самой линзы (BF_B). Это можно сделать с помощью формулы тонкой линзы, однако написать её сразу и правильно в этом случае достаточно сложно, поэтому воспользуемся обычной геометрией. Из подобия треугольников F_BBB' и $F_BF'F$:

$$\frac{BB'}{FF'} = \frac{BF_B}{BF_B + BF}.$$

Из подобия треугольников BFF' и BF_0F_0':

$$\frac{F_0F_0'}{FF'} = \frac{BF_0}{BF}.$$

Так же по построению $BB' = F_0F_0'$. Выражая эти отрезки из двух предыдущих равенств и приравнивая, получаем:

$$BB' = FF' \cdot \frac{BF_B}{BF_B + BF} = FF' \cdot \frac{BF_0}{BF} = F_0F_0'$$

$$\frac{BF_B}{BF_B + BF} = \frac{BF_0}{BF}$$

$$\frac{BF_B + BF}{BF_B} = \frac{BF}{BF_0}$$

$$1 + \frac{BF}{BF_B} = \frac{BF}{BF_0}$$

$$\frac{1}{BF} + \frac{1}{BF_B} = \frac{1}{BF_0}$$

$$\frac{1}{BF_B} = \frac{1}{BF_0} - \frac{1}{BF}$$

Мы получили формулу тонкой линзы для данного случая. Также мы знаем, что $BF = 3 \cdot BF_0$, так как линза Барлоу должна уменьшать угол схождения лучей в точку в 3 раза. И что $BF = BO - FO$ ($FO = f$ — фокусное расстояние окуляра), а значит, $BF = 15$ мм и $BF_0 = 5$ мм – это искомое в задаче расстояние от линзы Барлоу до фокальной плоскости телескопа.

Далее подставляем полученные значения в формулу тонкой линзы и получаем, что фокус линзы Барлоу $-1 \cdot BF_B = -7.5$ мм. Знак минус ставится, так как линза рассеивающая. Оптическая сила линзы $\tilde{D} = -1/0.0075 = -133.3$ дптр.

Критерии проверки

1. Определение углового диаметра Юпитера в противостоянии **1 балл**
2. Определение кратности линзы Барлоу **2 балла**
3. Получение или правильная запись формулы тонкой линзы **2 балла**
4. Вычисление расстояния от линзы до фокальной плоскости **2 балла**
5. Вычисление оптической силы линзы **1 балл**

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(С. Г. Желтоухов)

Задача 6

Технологически развитая цивилизация способна отправить автономный звездолёт-поселение к ближайшей соседней звезде. Звездолёт имеет скорость 10% от скорости света. После прибытия к звезде за время 200 лет экипаж звездолёта построит два аналогичных звездолёта, используя найденное вокруг звезды вещество, а население первого звездолёта увеличится достаточно, чтобы составить команду новых звездолётов. Они отправятся к двум ближайшим звёздам, которые представители этой цивилизации ещё не посещали, и около них история повторится (спустя 200 лет после прибытия от каждой звезды отправятся два новых звездолёта). Необходимо оценить минимальное время, которое потребуется, чтобы звездолёты этой цивилизации побывали около каждой звезды из диска нашей Галактики. Считать, что звёзды в диске распределены однородно.

Решение. Число звёзд, которое посетят звездолёты за n поколений (если первый звездолёт считать первым поколением) даётся суммой:

$$N(n) = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Для последнего равенства использовалась сумма n первых членов геометрической прогрессии. Приравняв к числу звёзд в Галактике $N_\mathrm{s} = 10^{11}$ и пренебрегая 1, получаем:

$$n = \log_2 10^{11} = \frac{\lg 10^{11}}{\lg 2} \approx 36.54 < 37.$$

Таким образом, наименьшее число поколений звездолётов, за которое возможно колонизировать галактику, равно 37.

Теперь нужно найти среднее расстояние, которое будут проходить звездолёты каждого поколения. Время расселения будет минимальным, если расселение будет происходить из центра Галактики. Чтобы минимизировать расстояние, на каждом «шаге» расселения будет максимально плотно заполняться круглая область диска (заселённая область — это круг, все звёзды внутри круга заселены). Радиус этой области r_i найдём из условия однородности распределения звёзд в диске, т.е. из того, что число звёзд в круге пропорционально его площади:

$$r_i = r_\mathrm{g}\sqrt{\frac{N(i)}{N_\mathrm{s}}},$$

где r_g – радиус диска Галактики. Расстояния, проходимые звездолётами на каждом шаге будут лежать в диапазоне от 0 до r_i. Возьмём для оценки среднее, т.е. $r_i/2$. Тогда итоговая оценка времени расселения будет

$$t = 200n + \sum_{i=1}^{n} \frac{r_\mathrm{g}}{2v}\sqrt{\frac{N(i)}{N_\mathrm{s}}} = 200n + \frac{r_\mathrm{g}}{2v\sqrt{N_\mathrm{s}}}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2}\right)^i =$$
$$= 200n + \frac{r_\mathrm{g}}{2v\sqrt{N_\mathrm{s}}}\frac{2^{\frac{n}{2}} - 1}{\sqrt{2} - 1} \approx 200n + 2.8\frac{r_\mathrm{g}}{v},$$

где мы использовали, что $N(i) \approx 2^i$. Считая радиус диска Галактики 20 кпк или 65 тыс.

световых лет, получаем, что членом $200n$ можно пренебречь, и итоговый ответ

$$t \approx 1.8\,\text{млн. лет}.$$

Это не единственное верное решение, итоговый ответ может зависеть от того, как именно выполняется заполнение Галактики. В частности, в качестве оценки расстояния, проходимого за 1 шаг, можно взять r_i. Тогда ответ увеличится в 2 раза. Возможно, существует более эффективный способ заполнения фрактальным «деревом». Однако принципиально неверным будет ответ r_g/v, при котором не учитывается пространственное распределение звёзд и необходимость заселения всех звёзд. Также неверный ответ $t = 200n = 7400$ лет.

В приведённом выше решении считалось, что распределение звёзд двухмерное. На самом деле, диск Галактики имеет конечную толщину около 1100 св.лет. Поэтому для шагов расселения до 30-го включительно (из условия $r_i = 1100$ св. лет) следовало бы считать распределение трёхмерным, и считать время по более точной формуле:

$$t = \frac{r_\text{g}}{2vN_\text{s}^{1/3}} \sum_{i=1}^{30} 2^{i/3} + \frac{r_\text{g}}{2vN_\text{s}^{1/2}} \sum_{i=31}^{37} 2^{i/2} \approx 3.3\frac{r_\text{g}}{v}.$$

Однако, учитывая приближённый характер оценки, этого можно не делать.

Критерии проверки

В задаче возможны различные решения, которые могут быть засчитаны как правильные. Ниже приведены ориентировочные вехи решения, которые можно оценить. Обратите внимание на то, что в справочные данные вкралась опечатка в числе звёзд в галактике — 10×10^{11}.

1. Определение числа поколений (с учетом опечатки — 40) **2 балла**
2. Выбор центра галактики для начала экспансии **1 балл**
3. Определение среднего расстояния или времени, затрачиваемого на перелёт **3 балла**
4. Итоговый ответ. Засчитывается при разумных предположениях в предыдущих пунктах **2 балла**

   При ответе меньше 650 000 лет (время пересечения галактики по радиусу со скоростью $0.1c$) последний этап не засчитывается в любом случае.

Максимальная оценка за задачу **8 баллов**.

(С. В. Пилипенко)

Задача 7

На рисунке изображён негатив фотографии касательного покрытия Марса Луной. С его помощью определите фазу Луны и расстояние до Марса.

Фотография Ron Dantowitz с сайта Sky & Telescope.

Решение. Есть несколько решений этой задачи. Все они в силу невысокой точности измерений дают несколько разные ответы.

Расстояние до Марса легко вычислить, если знать его угловой размер. Для этого его надо сравнить с каким либо объектом известного размера. На рисунке есть только Луна, чей угловой диаметр $30'$, но она видна только частично. Воспользуемся тем, что изображения Марса позволяют проследить тёмный край Луны. Построим хорду длиной $2l$ и отложим перпендикуляр H от середины хорды до края лимба Луны. Тогда радиус Луны равен

$$R = \frac{l^2 + H^2}{2H}.$$

Измерив размер Марса, получим, что он примерно в 95 раз меньше Луны, т.е. его угловой размер составляет 19″. Зная диаметр Марса, нетрудно определить расстояние до него:

$$L_1 = \frac{2 \times 3390\,\text{км}}{19} \times 206265 \approx 73.6 \times 10^6\,\text{км} \approx 0.49\,\text{а.е.}$$

Сравнив максимальный и минимальный диаметры изображения Марса, получим, что его фаза равна $\Phi = 0.89$. Отсюда фазовый угол $\varphi = \arccos(2\Phi - 1) \approx 39°$. В треугольнике Солнце-Земля-Марс с помощью теоремы синусов найдём угол при Солнце:

$$\gamma = \arcsin\left(\sin\varphi \frac{L_1}{a_0}\right) = 18° \,\text{или}\, 162°.$$

При $\gamma = 162°$ расстояние от Земли до Марса должно быть около 2.5 а.е. К тому же, мы видим, что Луна находится между четвертью и полнолунием, а значит, искомый угол должен быть острым и правильным является ответ 18°. Тогда угол при Земле равен $\beta = 180° - 18° - 39° = 123°$. Тогда $180° - 123° = 57°$ — это фазовый угол Луны и её фаза $\Phi_л = \cos^2(57/2) = 0.77$.

Можно определить расстояние до Марса, используя только измерение фазы, но для этого надо предположить расстояние от Солнца до Марса, например, принять его равным среднему расстоянию Марса до Солнца (а = 1.52 а.е.). Тогда угол при Земле получается равным

$$\beta_2 = \arcsin\left(\sin\varphi \frac{a}{a_0}\right) = 107°,$$

откуда угол при Солнце $\gamma_2 = 180° - 39° - 107° = 34°$, и расстояние от Земли до Марса можно определить из теоремы косинусов:

$$Ł_2 = 1^2 + 1.52^2 - 2 \times 1.52 \cos(34°) = 0.79\,\text{а.е.}$$

Расстояние получилось завышенным, поскольку истинное расстояние Марса от Солнца на момент съемки было несколько меньше из-за эллиптичности его орбиты.

Критерии проверки

1. Определение углового размера Марса **3 балла**
   Определение размера Луны на фотографии – 2 балла. Последний балл выставляется непосредственно за вычисление углового размера Марса.
2. Определение фазы Марса **3 балла**
3. Определение расстояния до Марса **3 балла**
   Если для выполнения этапа привлекаются дополнительные предположения, например, как показано в решении, орбита Марса можнт быть принята круговой, то оценка за этап может быть снижена вплоть до 0 баллов в зависимоси от правдоподобности предположения.
4. Определение фазового угла Луны **2 балла**
5. Определение фазы Луны **1 балла**
   Ответы наподобие «растущий/убывающий серп/месяц» правильными не являются.

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)

Задача 8

Радиоизлучение пульсаров распространяется через межзвёздную среду со скоростью $v = \left(1 - (f_p/f)^2\right)^{0.5} c$, где f — частота излучения, $f_p = 8.98\,\text{кГц} \times \sqrt{n_e}$ — плазменная частота, n_e — электронная плотность, выраженная в см$^{-3}$, c – скорость света. В результате импульсы пульсаров приходят не одновременно на разных частотах. На рисунке показана зависимость времени прихода импульсов от частоты для пульсара J1840+5640. Определите:

1. период пульсара в секундах;
2. меру дисперсии (произведение электронной плотности на расстояние до пульсара) в пк/см^3;
3. электронную плотность в направлении пульсара в см$^{-3}$;
4. какая должна быть ширина полосы пропускания приёмника, центрированная на 110 МГц, чтобы последовательные импульсы не накладывались друг на друга?

Тригонометрический параллакс пульсара равен 0.66 ± 0.06 миллисекунд. Для всех четырёх величин укажите погрешности измерения.

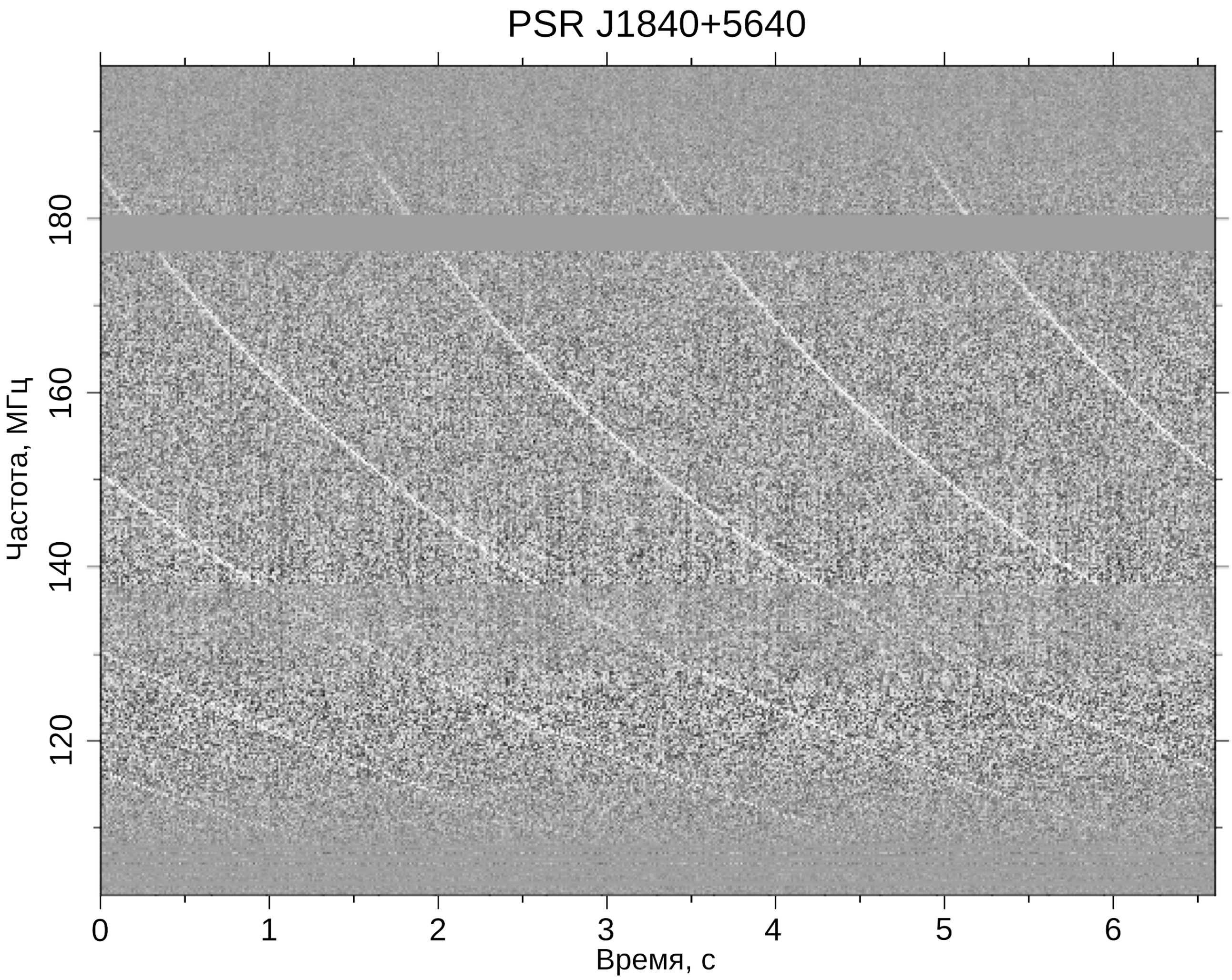


Рисунок из бакалаврской работы Julian Donner.

Решение. Чтобы определить период пульсара, достаточно провести горизонтальную линию и измерить расстояние вдоль неё между импульсами. Правильнее всего измерить расстояние между самыми дальними импульсами, а результат разделить на число периодов между этими импульсами. Разумеется, измерения надо повторять неоднократно. Период пульсара получается равным $P = 1.66 \pm 0.05$ с.

Измеренная величина — это именно период пульсара как источника. Радиоизлучение пульсара формируется в районе полярных шапок нейтронных звёзд, но к нам обычно приходит излучение только от одной такой области. В редких случаях удачного расположения оси вращения звезды и наклона её магнитной оси между главными импульсами наблюдается слабый интеримпульс, а ситуации, когда интеримпульс близок по интенсивности с главным импульсом, исключительно редки. Поэтому период пульсара можно интерпретиовать как период вращения нейтронной звезды.

Пусть L — расстояние до пульсара. Тогда время, за которое сигнал достигнет наблюдателя, равно

$$t = \frac{L}{c}\left(1 - \frac{f_p^2}{f^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{L}{c}\left(1 + \frac{f_p^2}{2f^2}\right).$$

Здесь мы учли, что излучение может распространяться только при $f_p < f$, в противном случае скорость радиоизлучения не выражается действительным числом. Кроме того, радионаблюдения проводят на частотах до десятков килогерц. Использованию более низких частот препятствует ионосфера Земли, тогда как в межзвёздном пространстве может распространяться излучение и с меньшими частотами. Поэтому с полным правом можно считать, что $f_p \ll f$, чем мы и воспользовались для упрощения выражения выше. Разница во времени прибытия сигнала на разных частотах равна

$$\Delta t = \frac{L f_p^2}{2c}\left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2}\right) = D \times DM \left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2}\right).$$

Здесь $D = (8.98\,\text{кГц})^2/(2c) \approx 4.15 \times 10^3\,\text{МГц}^2\ \text{пк}^{-1}\ \text{см}^3\ \text{с}$ — дисперсионная постоянная, $DM = n_e L$ — мера дисперсии.

Чтобы определить меру дисперсии, надо измерить задержку одного импульса на разных частотах. Величина меры дисперсии получается равной 27 ± 2 пк/см^3.

Электронная плотность равна

$$n_e = \frac{DM}{L} = DM \times \pi'' \approx 0.019 \pm 0.002\,\text{см}^{-3}.$$

Следует заметить, что погрешность параллакса, данная в условии, больше, чем погрешность измерения меры дисперсии по данному рисунку.

Теперь ответим на последний вопрос. Частота 110 МГц присутствует на графике. Можно выбрать точку пересеченя одного из импульсов этой частоты, отложить отрезок к большим частотам до пересечения со следующим импульсом и принять за полуширину искомой полосы пропускания половину этого отрезка. Тогда получим полуширину полосы пропускания около 5.7 МГц, т. е. искомую ширину 11.4 МГц. Однако на меньших частотах импульсы сильнее растягиваются во времени и сближаются в частотном направлении, отчего ширина полосы будет определяться со стороны низких частот, которые на графике не видны. Поэтому такой упрощённый подход нельзя считать правильным.

Пусть f_0 — центральная частота, а Δf — половина полосы частот приёмника. Тогда разница времени прихода импульса на границах диапазона должна быть не больше периода пульсара. Получаем:

$$P = D \times DM \left(\frac{1}{(f_0 - \frac{\Delta f}{2})^2} - \frac{1}{(f_0 + \frac{\Delta f}{2})^2} \right).$$

Ожидаемое значение Δf много меньше f_0, поэтому запишем приближенное значение выражения в скобках:

$$\frac{P f_0^2}{D \times DM} = \left(\left(1 - \frac{\Delta f}{2 f_0}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{\Delta f}{2 f_0}\right)^{-2} \right) \approx 1 + \frac{\Delta f}{f_0} - 1 + \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{2\Delta f}{f_0}.$$

Отсюда

$$\Delta f = \frac{P f_0^3}{2D \times DM} = 9.9 \pm 0.1\,\text{МГц}.$$

Критерии проверки

Погрешности, указанные в решении, указывают не допустимую погрешность измерений, а допустимое отклонение ответа участника. Реальные погрешности при использовании линейки в несколько раз меньше. Отклонение ответа участника больше, чем на величину погрешности, но менее, чем на 2 её величины, приводит к уменьшению оценки за соответствующий пункт на 1 балл.

1. Определение периода пульсара и погрешности измерения **по 1 баллу**
   Если за период пульсара принимается удвоенная величина периода, то оценка за этап не превышает 1 балла.
2. Измерена задержка импульса на двух разных частотах **1 балл**
3. Вывод формулы, связывающей задержку сигнала от частоты **1 балл**
4. Приведение этой формулы к вычислениям на обычном калькуляторе или верное численное решение на «продвинутом» калькуляторе (обычно вычисление плазменной частоты – правильное значение 1.2 кГц) **1 балл**
5. Определение меры дисперсии и её погрешности **по 1 баллу**
6. Определение электронной плотности и её погрешности **по 1 баллу**
7. Определение ширины полосы пропускания **2 балла**
8. Определение погрешности ширины полосы **1 балл**
   При определении ширины полосы упрощённым способом выставляется только 1 балл и не оценивается оценка погрешности.

Максимальная оценка за задачу **12 баллов**.

(Е. Н. Фадеев)