МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

8 КЛАСС

1 вариант

Задание 1

Найдите пять натуральных чисел, произведение которых равно 210, а сумма – 18.

Решение: Разложим 210 на множители: $210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$. В сумме 18 можно получить, сложив их: $1 + 2 + 3 + 5 + 7 = 18$.

Ответ: 1, 2, 3, 5, 7.

Задание 2

Найдите все решения уравнения $x(x + 1) = 2020 \times 2021$.

Решение: Корни могут быть найдены по теореме Виета или угаданы.

Ответ: 2020, -2021.

Задание 3

Вася каким-то образом распределил шесть монет разного достоинства по двум карманам своего пальто. С какой вероятностью мы можем угадать, в каком кармане какие монеты?

Решение: Каждая из монет может оказаться в любом из карманов, таким образом, общее количество вариантов составляет 2^6. Вероятность угадать, соответственно, равна 1/64.

Ответ: 1/64.

Задание 4

Могут ли величины всех трёх углов треугольника быть простыми? Если нет, то укажите в ответе (0, 0, 0). Если да, то приведите одну из возможных комбинаций величин углов.

Решение: Так как сумма углов треугольника равна 180°, то все углы не могут быть нечётными числами одновременно. Следовательно, градусная мера одного из углов равна 2°. Остается подобрать два простых числа, сумма которых равна 178.

Ответ: 2; 5 + 173, 11 + 167, 29 + 149, 41 + 137, 47 + 131, 71 + 107, 89 + 89.

Задание 5

Маша записала ряд цифр от 1 до 9 и решила расставить перед каждым из них знаки сложения или вычитания.

а) Может ли у неё получиться 0?

б) Может ли получиться 1?

в) Какие числа могут получиться? Выберите ответ:

1) все нечётные числа от –43 до 43.

2) все чётные числа от –44 до 44.

3) все чётные числа от –46 до 46

4) все нечётные числа от –45 до 45.

5) каждое второе нечётное число от –45 до 45.

6) каждое третье нечётное число от –45 до 45.

Решение:

а) Поскольку нечётно количество нечётных слагаемых, получиться четного числа не может.

б) Может, это можно показать, подобрав подходящую расстановку знаков (например, 1+2+3+4-5+6+7-8-9).

в) Наибольший (45) и наименьший (-45) результат можно получить, если все знаки будут плюсами и минусами соответственно. Можно показать, что, если мы сумели получить число меньше максимального, то всегда можно так изменить расстановку знаков, что число увеличится на 2. Действительно, если перед единицей стоит минус, то мы можем изменить его на плюс. Если же перед единицей стоит плюс, то, значит, в выражении после одного из плюсов следует минус, иначе число было бы максимальным. Изменив оба знака, мы также увеличим число на 2. Таким образом, мы можем получить любое нечётное число в диапазоне между максимальным и минимальным.

Ответ: а) Не может; б) может; в) 4) все нечётные числа от –45 до 45.

Задание 6

Найдите остатки от деления числа 2^{2022} на а) 3, б) 7, в) 13.

Решение: а) Остаток при делении 4 на 3 равен 1. Значит, $2^{2022} = (2^2)^{1011} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$.

б) Остаток при делении 8 на 7 равен 1. Значит, $2^{2022} = (2^3)^{674} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 7)$.

в) Остаток при делении 64 на 13 равен -1. Значит, $2^{2022} = (2^6)^{337} \equiv 12 (\mathrm{mod}\ 13)$.

Ответ: а) 1, б) 1, в) 12.

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

8 КЛАСС

2 вариант

Задание 1

Найдите пять натуральных чисел, произведение которых равно 150, а сумма – 16.

Решение: Разложим 150 на множители: 150 = 2 × 3 × 5 × 5. В сумме 16 можно получить, сложив их: 1 + 2 + 3 + 5 + 5 = 16.

Ответ: 1, 2, 3, 5, 5.

Задание 2

Найдите все решения уравнения $x(x+1) = 2021 \times 2022$.

Решение: Корни могут быть найдены по теореме Виета или угаданы.

Ответ: 2021, -2022.

Задание 3

Вася каким-то образом распределил пять монет разного достоинства по трём карманам своего пальто. С какой вероятностью мы можем угадать, в каком кармане какие монеты?

Решение: Каждая из монет может оказаться в любом из карманов, таким образом, общее количество вариантов составляет 3^5. Вероятность угадать, соответственно, равна 1/243.

Ответ: 1/243.

Задание 4

Могут ли величины всех трёх углов треугольника быть простыми? Если нет, то укажите в ответе (0, 0, 0). Если да, то приведите одну из возможных комбинаций величин углов.

Решение: Так как сумма углов треугольника равна 180°, то все углы не могут быть нечётными числами одновременно. Следовательно, градусная мера одного из углов равна 2°. Остается подобрать два простых числа, сумма которых равна 178.

Ответ: 2; 5 + 173, 11 + 167, 29 + 149, 41 + 137, 47 + 131, 71 + 107, 89 + 89.

Задание 5

Маша записала ряд цифр от 1 до 9 и решила расставить перед каждым из них знаки сложения или вычитания.

а) Может ли у неё получиться 0?

б) Может ли получиться 1?

в) Какие числа могут получиться? Выберите ответ:

1) все нечётные числа от –43 до 43.

2) все чётные числа от –44 до 44.

3) все чётные числа от –46 до 46

4) все нечётные числа от –45 до 45.

5) каждое второе нечётное число от –45 до 45.

6) каждое третье нечётное число от –45 до 45.

Решение:

а) Поскольку нечётно количество нечётных слагаемых, получиться четного числа не может.

б) Может, это можно показать, подобрав подходящую расстановку знаков (например, 1+2+3+4-5+6+7-8-9).

в) Наибольший (45) и наименьший (-45) результат можно получить, если все знаки будут плюсами и минусами соответственно. Можно показать, что, если мы сумели получить число меньше максимального, то всегда можно так изменить расстановку знаков, что число увеличится на 2. Действительно, если перед единицей стоит минус, то мы можем изменить его на плюс. Если же перед единицей стоит плюс, то, значит, в выражении после одного из плюсов следует минус, иначе число было бы максимальным. Изменив оба знака, мы также увеличим число на 2. Таким образом, мы можем получить любое нечётное число в диапазоне между максимальным и минимальным.

Ответ: а) Не может; б) может; в) 4) все нечётные числа от –45 до 45.

Задание 6

Найдите остатки от деления числа 2^{2022} на а) 5, б) 9, в) 11.

Решение: а) Остаток при делении 4 на 5 равен -1. Значит, $2^{2022} = (2^2)^{1011} \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 5)$.

б) Остаток при делении 8 на 9 равен -1. Значит, $2^{2022} = (2^3)^{674} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 9)$.

в) Остаток при делении 32 на 11 равен -1. Значит, $2^{2022} = (2^6)^{337} \equiv 4 (\mathrm{mod}\ 11)$.

Ответ: а) 4, б) 1, в) 4.