МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

10 КЛАСС

1 вариант

Задание 1

Решите уравнение:

$$\sqrt{(x+1)^2}+2\sqrt{x^2+4x+4}=|10+x|-|5-2x|.$$

Решение: Корни в левой части уравнения можно раскрыть как модули $\left(x^2+4x+4=(x+2)^2\right)$ и свести к совокупности систем уравнений.

Ответ: [-1; 2,5].

Задание 2

В треугольнике *ABC* с углом *A*, равным 60°, проведена биссектриса *AD*. Радиус описанной около треугольника *ADC* окружности с центром в точке *O* равен $\sqrt{3}/3$. Найдите длину *OB*, если *AB* = 0.5. В ответе укажите OB^2.

Решение: Можно показать, что треугольник *ODC* — равносторонний. Если ввести следующие обозначения: AD = *l*, BD = *x*, AC = *z*, то справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1}{2z}=\frac{3x}{\sqrt{3}},l=\frac{\sqrt{3}z}{2z+1}.$$

l^2 = *AB·AC* – *BD·DC* по свойству биссектрисы, следовательно $l^2=0,5z-\sqrt{3}x/3$. После этого, задачу можно свести к системе уравнений, относительно *x*, *l*, *z*.

Ответ: $\frac{7}{12}$.

Задание 3

Найдите наибольшее возможное значение параметра b, при котором неравенство $2b+b^2-2b\sin x>\cos^2 x+2$ не выполняется при каком-либо значении x. В качестве ответа введите квадрат найденного значения b.

Решение: Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, свести данное уравнение к квадратному относительно sin x, сделать замену sin x = t. Для t действует соответствующее ограничение на значения: $-1 \le t \le 1$. Тогда получаем, что неравенство выполняется при любых x, если $b \in (-\infty; -2-\sqrt{6}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Ответ: 2.

найдите наибольшее возможное значение параметра b, при котором неравенство ... не выполняется при каком-либо значении x. В ответе укажите квадрат этого значения" (тогда ввести нужно 2).

Задание 4

Найдите все целые решения системы уравнений $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^3+y^3+z^3=46 \end{cases}$.

Решение: Можно свести систему к виду: $\begin{cases} x+y+z=4 \\ (x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=18 \end{cases}$

Рассмотрев второе уравнение, преобразуем его к виду:

$\left((x+y+z)^3-x^3\right)-\left(y^3+z^3\right)=18$. Проведя преобразования при помощи формул суммы и разности кубов, получим уравнение $(y+z)(x+y)(x+z)=6$.

Ответ: (3, 3, –2), (3, –2, 3), (–2, 3, 3).

Задание 5

Дан квадрат размером 35×35 клеток. Какое минимальное количество клеток нужно закрасить, чтобы четырех клеток, образующих «Г», обязательно была хотя бы одна закрашенная?

Решение: закрашивать надо по диагонали каждую 3-ю клетку, между диагоналями должен быть промежуток в две не закрашенные клетки. Таким образом, будет закрашено $N^2/3$ клеток, где N — сторона квадрата. Можно показать, что это минимально возможное количество, так как внутри любого квадрата 3×3 нужно закрашивать не менее трех клеток.

Ответ: 408.

Задание 6

Пусть число вхождений заданного символа в текст составляет от 10,5% до 11% длины текста (под длиной текста понимаем общее количество символов в тексте). Найдите минимально возможную длину текста.

Решение: пусть символ встречается в тексте x раз. Задачу можно переформулировать так: найдите наименьшее натуральное число L, для которого существует такое натуральное число x, что $\frac{10,5}{100} < \frac{x}{L} < \frac{11}{100}$. Чем меньше x, тем меньше соответствующее L. При $x = 1$ не существует удовлетворяющего неравенству натурального L. При $x = 2$ находим, решая неравенство, что $L = 19$. Из неравенства $L \geq \frac{100x}{11}$ следует, что $L > 19$ при x ≥ 3.

Ответ: 19.

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

10 КЛАСС

2 вариант

Задание 1

Решите уравнение:

$$\sqrt{3x^2+6x+4}-\sqrt{2x^2+3x+5}=\sqrt{3x^2+4x+1}-\sqrt{2x^2+5x+8}.$$

Решение: сгруппировать корни из данных квадратных трехчленов так, чтобы при домножении и делении на сопряженные, сократились квадраты *x*.

Ответ: -1,5.

Задание 2

В треугольнике *ABC* с углом *A*, равным 60°, проведена биссектриса *AD*. Радиус описанной около треугольника *ADC* окружности с центром в точке *O* равен $\sqrt{3}/3$. Найдите длину отрезка *OM*, где *M* — точка пересечения отрезков *AD* и *BO*, если *AB* =1,5. В качестве ответа укажите OM^2.

Решение: Можно показать, что треугольник *ODC* — равносторонний. Если ввести следующие обозначения: *AD* = *l*, *BD* = *x*, *AC* = *z*, то справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1}{2z}=\frac{3x}{\sqrt{3}},l=\frac{\sqrt{3}z}{2z+1}.$$

$l^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$ по свойству биссектрисы, следовательно $l^2=1{,}5z-\sqrt{3}x/3$. После этого, задачу можно свести к системе уравнений, относительно *x*, *l*, *z*.

Ответ: 1,44.

Задание 3

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(a+2)x^2+\left(|a+3|-|a+11|\right)x+a=4$ имеет два различных положительных корня.

В качестве ответа укажите целое значение a внутри интервала таких значений.

Решение: при $a = -2$, уравнение становится линейным уравнением, что не удовлетворяет условию задачи. При $a \neq -2$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась система: $\begin{cases} D>0 \\ -\dfrac{b}{c}>0 \\ \dfrac{c}{a}>0 \end{cases}$.

Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, свести данное уравнение к квадратному относительно $\sin x$, сделать замену $\sin x = t$. Для t действует соответствующее ограничение на значения: $-1 \le t \le 1$. Таким образом, $a \in (4, 6)$.

Ответ: 5.

Задание 4

Найдите все целые решения системы уравнений $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$.

Решение: Можем свести систему к виду: $\begin{cases} x+y+z=3 \\ (x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=24 \end{cases}$.

Рассмотрев второе уравнение, воспользоваться формулами суммы кубов и разности кубов, преобразовав его предварительно к виду: $\left((x+y+z)^3-x^3\right)-\left(y^3+z^3\right)=24$. Проведя преобразования, получить уравнение $(y+z)(x+y)(x+z)=8$.

Ответ: (4, 4, -5), (4, -5, 4), (1, 1, 1), (-5, 4, 4).

Задание 5

Дан квадрат размером 35×35 клеток. Какое минимальное количество клеток нужно закрасить, чтобы из любой не закрашенной клетки нельзя было попасть в не закрашенную ходом шахматного коня?

Решение: закрашивать необходимо в шахматном порядке, поскольку любой ход коня на шахматной доске приходится на клетку другого цвета. Число закрашенных клеток у шахматной доски с длиной стороны в N клеток равно $N^2/2$.

«Ходом коня» можно обойти любую квадратную таблицу большую, чем 4×4 так, чтобы конь побывал на каждой ее клетки ровно один раз. Если пронумеровать эти ходы, то нетрудно заметить, что меньше $N^2/2$ клеток окрасить нельзя потому, что тогда в этой последовательности обязательно найдутся две подряд неокрашенные, т.е. будет возможен ход с одной из них на другую. Таблицу 35×35 нужно разбить на 49 таблиц 5×5, а нумеровать поочередно, начиная с первой таблицы 5×5.

Ответ: 612.

Задание 6

Пусть число вхождений заданного символа в текст составляет от 11,5% до 12% длины текста (под длиной текста понимаем общее количество символов в тексте). Найдите минимально возможную длину текста.

Решение: пусть символ встречается в тексте x раз. Задачу можно переформулировать так: найдите наименьшее натуральное число L, для которого существует такое натуральное число x, что $\frac{11,5}{100} < \frac{x}{L} < \frac{12}{100}$. Чем меньше x, тем меньше соответствующее L. При $x = 1$ не существует удовлетворяющего неравенству натурального L. При $x = 2$ находим, решая неравенство, что $L = 17$. Из неравенства $L \geq \frac{100x}{12}$ следует, что $L > 17$ при $x \geq 3$.

Ответ: 17.