

9 класс
Вариант 1

Задача 1

При работе исследовательского оборудования рабочая температура поддерживается при температуре окружающей среды -40°C за счет естественной теплопередачи в окружающую среду. Если мощность оборудования поднять на 10%, то через оборудование необходимо прокачивать 0,1 л/с холодной воды при температуре 0°C . Если при прежней мощности температура окружающей среды поднимается до -30°C , то для поддержания рабочей температуры необходимо прокачивать 0,2 л/с.

1) Определите рабочую температуру оборудования. Считать, что естественный поток пропорционален разности температуры оборудования и окружающей среды.

2) Найдите мощность оборудования.

Возможное решение

Пусть N — мощность оборудования, T_e — его температура, T_0 — температура окружающей среды, T_v — температура воды, ΔT — изменение температуры окружающей среды, α — коэффициент пропорциональности между теплоотводом и разностью температур, c — теплоемкость воды, q — поток воды.

1) Запишем баланс тепловыделения и теплового потока:

$$N = \alpha \cdot (T_e - T_0). \quad (1)$$

2) Запишем баланс тепловыделения и теплового потока при мощности, на 10% большей изначальной:

$$1,1 \cdot N = \alpha \cdot (T_e - T_0) + c \cdot \rho_v \cdot q_1 \cdot (T_e - T_v), \quad (2)$$

где q_1 — необходимый для описанной ситуации поток воды.

3) Запишем баланс тепловыделения и теплового потока при повышении температуры:

$$N = \alpha \cdot (T_e - T_0 - \Delta T) + c \cdot \rho_v \cdot q_2 \cdot (T_e - T_v), \quad (3)$$

где q_2 — поток воды, необходимый для поддержания рабочей температуры при повышении температуры окружающей среды.

4) Выразим рабочую температуру.

$$1,1 \cdot N \stackrel{(2)}{=} \alpha \cdot (T_e - T_0) + c \cdot \rho_v \cdot q_1 \cdot (T_e - T_v) \stackrel{(1)}{=} N + c \cdot \rho_v \cdot q_1 \cdot (T_e - T_v),$$

откуда

$$N = 10 \cdot c \cdot \rho_v \cdot q_1 \cdot (T_e - T_v) \Leftrightarrow c \cdot \rho_v = \frac{N}{10 \cdot (T_e - T_v) \cdot q_1} \stackrel{(1)}{=} \frac{\alpha \cdot (T_e - T_0)}{10 \cdot (T_e - T_v) \cdot q_1}. \quad (4)$$

Тогда

$$\begin{aligned} T_e - T_0 &\stackrel{(1)}{=} \frac{N}{\alpha} \stackrel{(3)}{=} (T_e - T_0) - \Delta T + \frac{c \cdot \rho_v \cdot q_2 \cdot (T_e - T_v)}{\alpha} \stackrel{(4)}{=} (T_e - T_0) - \Delta T + \frac{\alpha \cdot (T_e - T_0)}{10 \cdot (T_e - T_v) \cdot q_1} \cdot \frac{q_2 \cdot (T_e - T_v)}{\alpha} = \\ &= (T_e - T_0) - \Delta T + \frac{q_2 \cdot (T_e - T_0)}{10 \cdot q_1}. \end{aligned}$$

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап
профиль "Арктика"
Междисциплинарные задачи

Следовательно,

$$10 \cdot q_1 \cdot \Delta T = q_2 \cdot (T_e - T_0),$$

откуда

$$T_e = T_0 + \frac{10 \cdot q_1 \cdot \Delta T}{q_2} = 10(^{\circ}\text{C}).$$

5) Найдем мощность установки:

$$N = 10 \cdot c \cdot \rho_v \cdot q_1 \cdot (T_e - T_v) = 42 \text{ (кВт)}.$$

Критерии оценивания

1. Записано уравнение (1) - 20 баллов
2. Записано уравнение (2) - 20 баллов
3. Записано уравнение (3) - 20 баллов
4. Найдена температура оборудования - 20 баллов
5. Найдена мощность оборудования - 20 баллов

Задача 2

При преодолении снежных просторов Арктики вездеход подъехал к границе снега и ледяной полосы шириной в 60 м и остановился. Встречный ветер и плохое сцепление со льдом позволяло вездеходу только поддерживать скорость, не имея возможности ускориться. Сцепление со снегом было лучше, поэтому в обратном направлении по ветру вездеход мог ускориться с ускорением $0,4 \text{ м/с}^2$, тормозить — с ускорением $0,2 \text{ м/с}^2$, а двигаться вперед — с ускорением $0,3 \text{ м/с}^2$.

Механик-водитель решил некоторое время τ разогнаться от ледяной полосы в обратную сторону, потом затормозить, затем разогнаться вперед и за счет набранной скорости преодолеть ледяную полосу.

- 1) На какое расстояние вездеход удалится от границы ледяной полосы?
- 2) Постройте график скорости для всех маневров, по абсцисс откладывается время в τ а по оси ординат скорость в $0,1 \text{ м/с}^2 \cdot \tau$.
- 3) При каком τ полное время маневров, с учетом преодоления ледяной полосы, составит 45 секунд?
- 4) Можно ли, изменив время разгона, уменьшить полное время до 40 секунд?
- 5) Найдите значение τ , при котором полное время маневров будет минимальным.
- 6) Найдите это полное время маневров.

Возможное решение

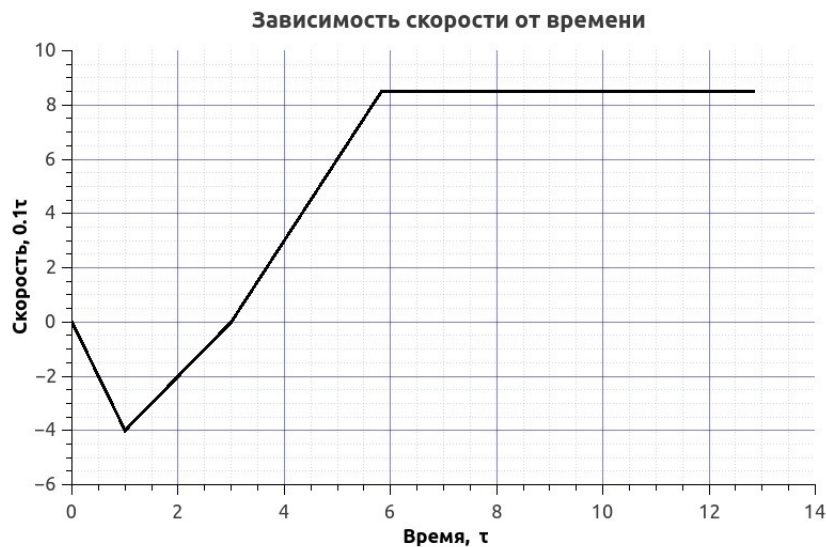
- 1) Найдем расстояние, на которое удалился вездеход:

$$s = \frac{a_1 \cdot \tau^2}{2} + \frac{a_1^2 \cdot \tau^2}{2 \cdot a_2} = 0,6 \cdot \tau^2.$$

- 2) Построим график:

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап
профиль "Арктика"
Междисциплинарные задачи



3) Найдем полное время:

$$t = 5 \cdot \tau + \frac{L}{\sqrt{2 \cdot a_3 \cdot s}} = 5\tau + \frac{100}{\tau}.$$

Преобразуем это уравнение в квадратное:

$$5\tau^2 - t\tau + 100 = 0,$$

дискриминант которого равен

$$D = t^2 - 2000.$$

В случае, когда $t = 45$ с, $D = 25$. Но тогда $\tau_1 = 4$ с и $\tau_2 = 5$ с.

4) При $t = 40$ с дискриминант уравнения будет отрицательным, потому решения не будет существовать. Значит, ответ: нет, нельзя.

5-6) Полное время манёвров минимально, если дискриминант равен 0, то есть,

$$t_{\min} = \sqrt{2000} = 20\sqrt{5} \approx 44,72 \text{ (с)}.$$

При этом, полное время минимально при $\tau_{\min} = 2\sqrt{5} \approx 4,47$ (с).

Критерии оценивания

1. Найдено s - 20 баллов
2. Построен правильный график - 50 баллов
3. Найдено τ_1 и τ_2 - 20 баллов
4. Дано объяснение отсутствия решения при $t = 40$ с - 20 баллов
5. Найдены t_{\min} и τ_{\min} - по 20 баллов

Задача 3

Ватерлиния — линия на корпусе судна, показывающая наибольшую допустимую просадку судна. В некоторые районы Арктики можно добраться исключительно на ледоколе. Ученые собираются в очередную экспедицию.

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап
профиль "Арктика"
Междисциплинарные задачи

Необходимо написать программу, которая будет определять максимальную массу груза, который может перевезти ледокол.

Формат входных данных:

Натуральные числа m — масса ледокола (в кг) и водоизмещение P (в Ньютонах) ледокола с грузом при осадке до ватерлинии.

Формат выходных данных:

Действительное число, равное максимальной массе груза (в тоннах), который можно будет погрузить на ледокол.

Ускорение свободного падения g принять равным 10 м/с^2 .

Перед кодом программы обязательно опишите алгоритм и вывод используемой формулы для нахождения искомой величины.

Возможное решение

Нахождение искомой величины:

Поскольку ледокол находится на плаву, то его вес с грузом должен быть равен весу вытесненной им среды (водоизмещению).

Вес ледокола равен $m \cdot g$, вес груза — $m_{\text{г}} \cdot g$. Значит,

$$P = m \cdot g + m_{\text{г}} \cdot g,$$

откуда масса груза в тоннах равна

$$m_{\text{г}} = \frac{P - m \cdot g}{1000 \cdot g}.$$

Листинг 1: Реализация нахождения искомой величины на языке C++

```
1 #include <iostream>
2 using namespace std;
3
4 int main() {
5     long long m, P;
6     cin >> m >> P;
7     double res;
8     res = (P - m * 10) / (1000 * 10);
9     cout << res << endl;
10
11     return 0;
12 }
```

Критерии оценивания

1. Обоснованный вывод о том, когда масса груза будет максимальной - 20 баллов
2. Выражение веса груза, корабля и условия плавучести корабля - по 10 баллов

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап
профиль "Арктика"

Междисциплинарные задачи

3. Искомое выражение - 10 баллов
4. Реализация программы - 40 баллов
5. Ответ выводится не в тоннах - —10 баллов
6. Использование целочисленных переменных - —10 баллов
7. Синтаксические ошибки - до —20 баллов

Вариант 2

Задача 1

При работе исследовательского оборудования при температуре окружающей среды -40°C за счет естественной теплопередачи в окружающую среду поддерживается рабочая температура 10°C . Если мощность оборудования поднять на 10%, то через оборудование необходимо прокачивать 0,1 л/с холодной воды при температуре 0°C . На улице потеплело, и для поддержания рабочей температуры необходимо прокачивать 0,2 л/с воды.

1) Найдите до какой температуры потеплело. Считать, что естественный поток пропорционален разности температуры оборудования и окружающей среды.

2) Найдите мощность оборудования.

Возможное решение

Пусть N — мощность оборудования, T_e — его температура, T_0 — температура окружающей среды, T_v — температура воды, ΔT — изменение температуры окружающей среды, α — коэффициент пропорциональности между тепло отводом и разностью температур, c — теплоемкость воды, q — поток воды.

1) Запишем баланс тепловыделения и теплового потока:

$$N = \alpha \cdot (T_e - T_0). \quad (5)$$

2) Запишем баланс тепловыделения и теплового потока при повышении мощности на 10%:

$$1,1 \cdot N = \alpha \cdot (T_e - T_0) + c \cdot \rho_v \cdot q_1 \cdot (T_e - T_v), \quad (6)$$

где q_1 — необходимый для описанной ситуации поток воды.

3) Запишем баланс тепловыделения и теплового потока при повышении температуры:

$$N = \alpha \cdot (T_e - T_0 - \Delta T) + c \cdot \rho_v \cdot q_2 \cdot (T_e - T_v), \quad (7)$$

где q_2 — поток воды, необходимый для поддержания рабочей температуры при повышении температуры окружающей среды.

4) Выразим рабочую температуру

$$1,1 \cdot N \stackrel{(6)}{=} \alpha \cdot (T_e - T_0) + c \cdot \rho_v \cdot q_1 \cdot (T_e - T_v) \stackrel{(5)}{=} N + c \cdot \rho_v \cdot q_1 \cdot (T_e - T_v),$$

откуда

$$N = 10 \cdot c \cdot \rho_v \cdot q_1 \cdot (T_e - T_v) \Leftrightarrow c \cdot \rho_v = \frac{N}{10 \cdot (T_e - T_v) \cdot q_1} \stackrel{(5)}{=} \frac{\alpha \cdot (T_e - T_0)}{10 \cdot (T_e - T_v) \cdot q_1}. \quad (8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} T_e - T_0 &\stackrel{(6)}{=} \frac{N}{\alpha} \stackrel{(7)}{=} (T_e - T_0) - \Delta T + \frac{c \cdot \rho_v \cdot q_2 \cdot (T_e - T_v)}{\alpha} \stackrel{(8)}{=} (T_e - T_0) - \Delta T + \frac{\alpha \cdot (T_e - T_0)}{10 \cdot (T_e - T_v) \cdot q_1} \cdot \frac{q_2 \cdot (T_e - T_v)}{\alpha} = \\ &= (T_e - T_0) - \Delta T + \frac{q_2 \cdot (T_e - T_0)}{10 \cdot q_1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$10 \cdot q_1 \cdot \Delta T = q_2 \cdot (T_e - T_0),$$

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап
профиль "Арктика"
Междисциплинарные задачи

откуда

$$\Delta T = \frac{q_2 \cdot (T_e - T_0)}{10 \cdot q_1} = 10 \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

Так как $\Delta T > 0$, значит, потеплело. Новое значение температуры $T_0 + \Delta T = -30^\circ\text{C}$.

5) Найдем мощность установки:

$$N = 10 \cdot c \cdot \rho_v \cdot q_1 \cdot (T_e - T_v) = 42 \text{ (кВт)}.$$

Критерии оценивания

1. Записано уравнение (5) - 20 баллов
2. Записано уравнение (6) - 20 баллов
3. Записано уравнение (7) - 20 баллов
4. Найдено новое значение температуры окружающей среды - 20 баллов
5. Найдена мощность оборудования - 20 баллов

Задача 2

При преодолении снежных просторов Арктики на собачьих упряжках исследователь Арктики подъехал к границе снега и ледяной полосы шириной в 30 м и остановился. Собаки по льду скользили, поэтому они могли только поддерживать скорость, не имея возможности ускоряться. Сцепление со снегом было лучше, поэтому в обратном направлении исследователь, сойдя с упряжки, мог тянуть упряжку с ускорением $0,8 \text{ м/с}^2$, тормозить с ускорением $0,4 \text{ м/с}^2$, а вперед двигаться на упряжке с ускорением $0,6 \text{ м/с}^2$. Исследователь решил некоторое время τ разогнаться от ледяной полосы в обратную сторону, потом затормозить, потом разогнаться вперед и за счет набранной скорости преодолеть ледяную полосу.

- 1) На какое расстояние исследователь удалится от границы ледяной полосы?
- 2) Постройте график скорости для всех маневров, по абсцисс откладывается время в τ , а по оси ординат — скорость в $0,1 \text{ м/с}^2 \cdot \tau$.
- 3) При каком τ полное время маневров, с учетом преодоления ледяной полосы, составит 22,5 с?
- 4) Можно ли, изменив время разгона, уменьшить полное время до 20 с?
- 5) Найдите значение τ , при котором полное время маневров будет минимальным.
- 6) Найдите это полное время маневров.

Возможное решение

- 1) Найдем расстояние, на которое удалился вездеход:

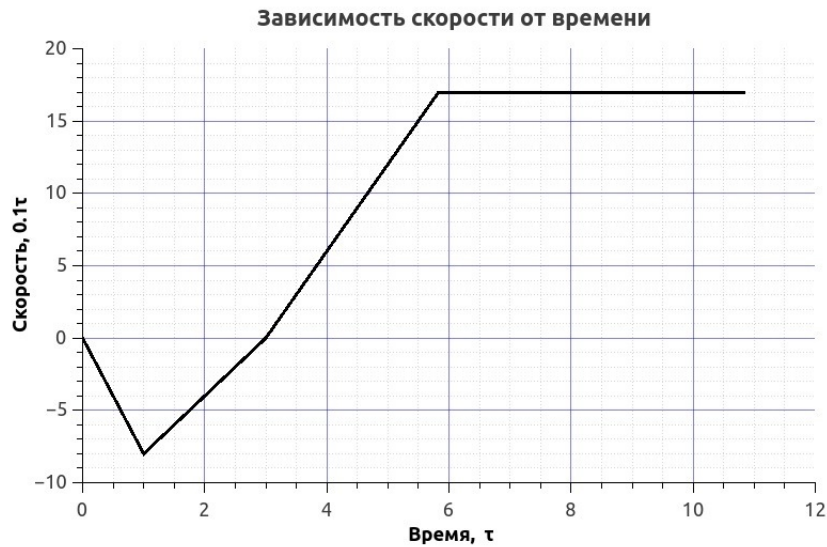
$$s_1 = \frac{a_1 \cdot \tau^2}{2} + \frac{a_1^2 \cdot \tau^2}{2 \cdot a_2} = \frac{0,8 \cdot \tau^2}{2} + \frac{0,8^2 \cdot \tau^2}{2 \cdot 0,4} = 1,2 \cdot \tau^2.$$

- 2) Построим график:

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап
профиль "Арктика"

Междисциплинарные задачи



3) Найдем полное время:

$$t = \tau + \frac{a_1}{a_2}\tau + \sqrt{\frac{2s_1}{a_3}} + \frac{L}{\sqrt{2a_3s_1}} = 5\tau + \frac{30}{1,2\tau} = 5\tau + \frac{25}{\tau}.$$

Преобразуем это уравнение в квадратное:

$$5\tau^2 - t\tau + 25 = 0,$$

дискриминант которого равен

$$D = t^2 - 500.$$

В случае, когда $t = 22,5$ с, $D = 6,25 = 2,5^2$. Но тогда $\tau_1 = 2$ с и $\tau_2 = 2,5$ с.

4) При $t = 20$ с дискриминант уравнения будет отрицательным, потому решения не будет существовать. Значит, ответ: нет, нельзя.

5-6) Полное время минимально, если дискриминант равен 0, то есть,

$$t_{\min} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5} \approx 22,36 \text{ (с)}.$$

При этом, полное время минимально при $\tau_{\min} = 2\sqrt{5} \approx 4,47$ (с).

Критерии оценивания

1. Найдено s - 20 баллов
2. Построен правильный график - 50 баллов
3. Найдено τ_1 и τ_2 - 20 баллов
4. Дано объяснение отсутствия решения при $t = 20$ с - 20 баллов
5. Найдены t_{\min} и τ_{\min} - по 20 баллов

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап
профиль "Арктика"
Междисциплинарные задачи

Задача 3

Ватерлиния — линия на корпусе судна, показывающая наибольшую допустимую просадку судна. В некоторые районы Арктики можно добраться исключительно на ледоколе. Ученые собираются в очередную экспедицию.

Необходимо написать программу, которая будет определять массу ледокола.

Формат входных данных:

Натуральные числа m_T — наибольшее значение массы груза (в кг), которое может перевезти данный ледокол, а также водоизмещение P (в Ньютонах) ледокола с грузом при осадке до ватерлинии.

Формат выходных данных:

Действительное число, равное массе ледокола (в кг).

Ускорение свободного падения g принять равным 10м/с^2 .

Перед кодом программы обязательно опишите алгоритм и вывод используемой формулы для нахождения искомой величины.

Возможное решение

Нахождение искомой величины:

Поскольку ледокол находится на плаву, то его вес с грузом должен быть равен весу вытесненной им среды (водоизмещению). Вес ледокола равен $m \cdot g$, вес груза — $m_T \cdot g$. Значит,

$$P = m \cdot g + m_T \cdot g,$$

откуда масса ледокола в тоннах равна

$$m = \frac{P - m_T \cdot g}{g}.$$

Листинг 2: Реализация нахождения искомой величины на языке C++

```
1 #include <iostream>
2 using namespace std;
3
4 int main( ) {
5     long long m, P;
6     cin >> m >> P;
7     double res;
8     res = (P - m * 10) / 10;
9     cout << res << endl;
10
11     return 0;
12 }
```

Критерии оценивания

1. Обоснованный вывод о том, когда масса груза будет максимальной - 20 баллов

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Заключительный этап
профиль "Арктика"

Междисциплинарные задачи

2. Выражение веса груза, корабля и условия плавучести корабля - по 10 баллов
3. Искомое выражение - 10 баллов
4. Реализация программы - 40 баллов
5. Неправильные единицы измерения - –10 баллов
6. Использование целочисленных переменных - –10 баллов
7. Синтаксические ошибки - до –20 баллов