

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

11 КЛАСС

Вариант 1

Задание 1

Средняя мощность, необходимая владельцу частного дома в Подмоскowie для комфортного проживания, составляет 1,4 кВт. Владелец дома хочет летом полностью обеспечить энергопотребление за счёт солнечных панелей с КПД, равным 0,1. Сумма солнечной радиации на единицу площади за лето в этом регионе составляет 112 кВт · ч/м². Какова общая площадь требуемых для этого батарей? Сохранение и передача энергии происходят без потерь.

Решение. Общие затраты энергии можно определить через требуемую мощность. Полученная от солнечных батарей энергия определяется как ηSw , где η – КПД, S – общая площадь батарей, w – сумма солнечной радиации. Тогда

$$S = \frac{Pt}{\eta w} = 276 \text{ м}^2.$$

Ответ: 276 м².

Задание 2

Модель Лотки – Вальтерры описывает взаимодействия типа «хищник-жертва». Пусть численности популяций мышей x и сов y в лесу описаны следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + (1,2 - 0,008 \cdot y_{i-1})x_{i-1} \\ y_i = y_{i-1} + (0,9 + 0,0003 \cdot x_{i-1})y_{i-1} \end{cases}$$

При каких начальных значениях x и y не будут меняться, то есть величина популяций будет неизменна?

Решение. В случае неизменных популяций имеем систему вида

$$\begin{cases} (\alpha - \beta y)x = 0 \\ (-\gamma + \delta x)y = 0 \end{cases}$$

Соответственно, искомые $x = \gamma/\delta$, $y = \alpha/\beta$.

Ответ: $x = 3000$, $y = 150$.

Задание 3

В математической статистике есть понятие ошибок первого и второго рода. В случае ошибки первого рода была отвергнута верная гипотеза, в случае ошибки второго рода – принята неверная. В случае медицинских тестов такой результат называется ложноположительным и ложноотрицательным соответственно.

Одно из исследований показало, что в случае ПЦР-теста на коронавирус вероятность получения ложноположительного результата (т. е. тест показал заболевание, когда в действительности его нет) составляет 0,5 %.

**МОСКОВСКАЯ ПРЕПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

1) В городе N за последнюю неделю были протестированы 14 тысяч человек и получено 1065 положительных тестов. Сколько из этих людей действительно заболели, если вероятность ложноотрицательного результата равна нулю?

2) Один из жителей сдал положительный тест. С какой вероятностью он болен с учётом определённой в пункте 1 статистики по заболеваемости?

Решение. Все, кто получили отрицательный тест – здоровы, так как ложноотрицательного результата не бывает. Вероятность того, что здоровый человек получит положительный результат равна 0,005.

Пусть x человек действительно больны. У них тесты будут положительны (вероятность ложноотрицательного теста нулевая). $(14\ 000 - x)$ человек здоровы, и с вероятностью 0,005 каждый из них получает ложноположительный тест. *Математическое ожидание количества ложноположительных тестов* равно $(14\ 000 - x) \cdot 0,005$. Приравниваем общее число положительных результатов к числу истинно больных людей в сумме с математическим ожиданием ложноположительных тестов $1065 = x + (14000 - x) \cdot 0,005$. Решая уравнение, получаем $x=1000$.

Ответ на второй вопрос можем искать строго или нестрого.

Строгое решение использует формулу условной вероятности:

Пусть A – событие, которое состоит в том, что человек болен, B – событие, которое состоит в том, что тест положителен, $p(A|B)$ – вероятность того, что человек болен, при условии положительного теста. Тогда

$$p(A|B) = p(AB) / p(B)$$

Можно считать, что $p(B) = 1065 / 14\ 000$,

$$p(AB) = 1000/14\ 000,$$

$$p(A|B) = (1000/14\ 000) : (1065 / 14\ 000) = 0,0939 = 93,9\%$$

Нестрогое решение: Среди 1065 людей с положительным тестом 1000 больны, а 65 здоровы.

Вероятность быть больным $1000 / 1065 = 0,0939 = 93,9\%$.

Ответ: 1) 1000, 2) 93,9 %.

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

**11 КЛАСС
Вариант 2**

Задание 1

Средняя мощность, необходимая владельцу частного дома в Подмоскowie для комфортного проживания, составляет 1,6 кВт. Владелец дома хочет летом полностью обеспечить энергопотребление за счёт солнечных панелей с КПД, равным 0,1. Сумма солнечной радиации на единицу площади за лето в этом регионе составляет 144 кВт · ч/м². Какова общая площадь требуемых для этого батарей? Сохранение и передача энергии происходит без потерь.

Решение. Общие затраты энергии можно определить через требуемую мощность. Полученная от солнечных батарей энергия определяется как ηSw , где η – КПД, S – общая площадь батарей, w – сумма солнечной радиации. Тогда

$$S = \frac{Pt}{\eta w} = 246 \text{ м}^2.$$

Ответ: 246 м².

Задание 2

Модель Лотки – Вальтерры описывает взаимодействия типа «хищник-жертва». Пусть численности популяций мышей x и сов y в лесу описаны следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} + (1,4 - 0,02 \cdot y_{i-1})x_{i-1} \\ y_i = y_{i-1} + (0,6 + 0,003 \cdot x_{i-1})y_{i-1} \end{cases}$$

При каких начальных значениях x и y не будут меняться, то есть величина популяций будет неизменна?

Решение

В случае неизменных популяций имеем систему вида

$$\begin{cases} (\alpha - \beta y)x = 0 \\ (-\gamma + \delta x)y = 0 \end{cases}$$

Соответственно, искомые $x = \gamma/\delta$, $y = \alpha/\beta$.

Ответ: $x = 200$, $y = 70$.

Задание 3

В математической статистике есть понятие ошибок первого и второго рода. В случае ошибки первого рода была отвергнута верная гипотеза, в случае ошибки второго рода – принята неверная. В случае медицинских тестов такой результат называется ложноположительным и ложноотрицательным соответственно.

**МОСКОВСКАЯ ПРЕПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП**

Одно из исследований показало, что в случае ПЦР-теста на коронавирус вероятность получения ложноположительного результата (т. е. тест показал заболевание, когда в действительности его нет) составляет 1 %.

1) В городе N за последнюю неделю были протестированы 14 тысяч человек и получено 1130 положительных тестов. Сколько из этих людей действительно заболели, если вероятность ложноотрицательного результата равна нулю?

2) Один из жителей сдал положительный тест. С какой вероятностью он болен с учётом определённой в пункте 1 статистики по заболеваемости?

Решение

Все, кто получили отрицательный тест – здоровы, так как ложноотрицательного результата не бывает. Вероятность того, что здоровый человек получит положительный результат равна 0,01.

Пусть x человек действительно больны. У них тесты будут положительны (вероятность ложноотрицательного теста нулевая). $(14\ 000 - x)$ человек здоровы, и с вероятностью 0,01 каждый из них получает ложноположительный тест. Математическое ожидание количества ложноположительных тестов равно $(14000 - x) \cdot 0,01$. Приравниваем общее число положительных результатов к числу истинно больных людей в сумме с математическим ожиданием ложноположительных тестов $1130 = x + (14000 - x) \cdot 0,01$. Решая уравнение, получаем $x = 1000$.

Ответ: математическое ожидание числа больных равно 1000.

Ответ на второй вопрос можем искать строго или нестрого.

Строгое решение использует формулу условной вероятности:

Пусть A – событие, которое состоит в том, что человек болен, B – событие, которое состоит в том, что тест положителен, $p(A|B)$ – вероятность того, что человек болен, при условии положительного теста. Тогда

$$p(A|B) = p(AB) / p(B).$$

Можно считать, что $p(B) = 1130 / 14\ 000$.

$$p(AB) = 1000 / 14\ 000.$$

$$p(A|B) = (1000 / 14\ 000) : (1130 / 14\ 000) = 0,0885 = 88,5\%.$$

Нестрогое решение: Среди 1130 людей с положительным тестом 1000 больны, а 130 здоровы.

Вероятность быть больным $1000/1130=0,0885 = 88,5\%$.

Ответ: 1) 1000, 2) 88,5 %.