ММО-2022, 9 класс (с решениями)

Задача 1. У каждого из девяти натуральных чисел $n, 2n, 3n, \ldots, 9n$ выписали первую слева цифру. Может ли при некотором натуральном n среди девяти выписанных цифр быть не более четырёх различных? *(2022-69 / Толпыго А.)*

Ответ: да, может.

Решение. Например, подходит $n = 25$. Для этого значения n получим числа

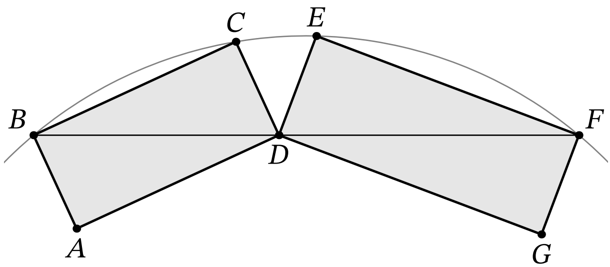
$$25,\ 50,\ 75,\ 100,\ 125,\ 150,\ 175,\ 200,\ 225.$$

Каждое из них начинается на одну из четырёх цифр 1, 2, 5, 7.

$\square$

Комментарий. Можно доказать, что меньше четырёх различных цифр получиться не могло. Ровно четыре различные цифры получается для натуральных чисел из интервалов вида $\Big[25\underbrace{0\ldots0}_{k-1}, 2\underbrace{9\ldots9}_{k}\Big]$ и $\Big[3\underbrace{3\ldots3}_{k-1}4, 3\underbrace{9\ldots9}_{k}\Big]$, где k — произвольное натуральное число.

Задача 2. Прямоугольники $ABCD$ и $DEFG$ расположены так, что точка D лежит на отрезке BF, а точки B, C, E, F лежат на одной окружности (см. рисунок). Докажите, что $\angle ACE = \angle CEG$.



(2022-1 / Бакаев Е.)

Решение. Так как точки B, C, E, F лежат на одной окружности, то

$$\angle ACE = \angle BCE - \angle ACB = (180^\circ - \angle BFE) - \angle ACB = 180^\circ - \angle DFE - \angle ACB. \qquad (1)$$

Аналогично

$$\angle CEG = \angle CEF - \angle FEG = (180^\circ - \angle CBF) - \angle FEG = 180^\circ - \angle CBD - \angle FEG. \qquad (2)$$

Поскольку $ABCD$ и $DEFG$ — прямоугольники, то $\angle ACB = \angle CBD$ и $\angle DFE = \angle FEG$. Тогда выражения в левых частях равенств (1) и (2) равны, поэтому $\angle ACE = \angle CEG$.

$\square$

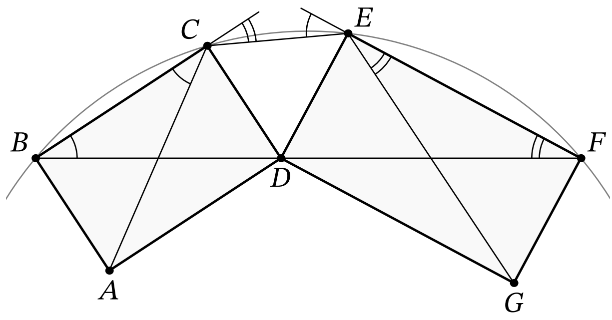


Рис. 1: к решению задачи 2

Задача 3. Коллекция Саши состоит из монет и наклеек, причём монет меньше, чем наклеек, но хотя бы одна есть. Саша выбрал некоторое положительное число $t > 1$ (не обязательно целое). Если он увеличит количество монет в t раз, а количество наклеек оставит тем же, то в его коллекции будет 100 предметов. Если же вместо этого он увеличит количество наклеек в t раз, а количество монет оставит тем же, то у него будет 101 предмет. Сколько наклеек могло быть у Саши? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет. *(2022-87 / Галочкин А.)*

Ответ: 34 или 66.

Решение. Обозначим через m количество монет, а через n — количество наклеек. Тогда условие можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} mt + n = 100, \\ m + nt = 101. \end{cases}$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$1 = 101 - 100 = (m + nt) - (mt + n) = (n - m)(t - 1).$$

Следовательно, $t = 1 + \frac{1}{n-m}$. Теперь сложим два изначальных уравнения:

$$201 = 101 + 100 = (mt + n) + (m + nt) = (m + n)(t + 1).$$

Следовательно, $t = \frac{201}{m+n} - 1$. Введём обозначения $a = n - m$, $b = n + m$. Отметим, что $a > 0$, поскольку $n > m$. Приравняем два выражения для t:

$$1 + \frac{1}{n - m} = \frac{201}{m + n} - 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{a} = \frac{201}{b} - 1 \Leftrightarrow \frac{2a + 1}{a} = \frac{201}{b}.$$

Заметим, что числа $2a + 1$ и a взаимно просты, поэтому дробь $\frac{2a+1}{a}$ несократима. Значит, 201 делится на $2a + 1$. У числа $201 = 3 \cdot 67$ всего четыре делителя: 1, 3, 67 и 201. Так как $2a + 1 > 1$, нужно разобрать три случая.

- Первый случай: $2a+1=3$. Тогда $a=1$ и $\frac{201}{b}=\frac{3}{1}$. Значит, $b=67$, откуда

  $$m=\frac{1}{2}(b-a)=33,\quad n=\frac{1}{2}(a+b)=34.$$

  Также $t=2$. Несложно проверить, что этот случай подходит.

- Второй случай: $2a+1=67$. Тогда $a=33$ и $\frac{201}{b}=\frac{67}{33}$. Значит, $b=99$, откуда

  $$m=\frac{1}{2}(b-a)=33,\quad n=\frac{1}{2}(a+b)=66.$$

  Также $t=\frac{34}{33}$. Несложно проверить, что этот случай подходит.

- Третий случай: $2a+1=201$. Тогда $a=100$ и $\frac{201}{b}=\frac{201}{100}$. Значит, $b=100$, откуда

  $$m=\frac{1}{2}(b-a)=0,\quad n=\frac{1}{2}(a+b)=100.$$

  Этот случай не подходит, так как должна быть хотя бы одна монета.

$\square$

Задача 4. Некоторые клетки доски 100×100 покрашены в чёрный цвет. Во всех строках и столбцах, где есть чёрные клетки, их количество нечётно. В каждой строке, где есть чёрные клетки, поставим красную фишку в среднюю по счёту чёрную клетку. В каждом столбце, где есть чёрные клетки, поставим синюю фишку в среднюю по счёту чёрную клетку. Оказалось, что все красные фишки стоят в разных столбцах, а синие фишки — в разных строках. Докажите, что найдётся клетка, в которой стоят и синяя, и красная фишки. *(2022-65 / Френкин Б.)*

Решение. Удалим из доски все строки и столбцы, в которых нет чёрных клеток. Заметим, что после этого условие задачи продолжит выполняться. Теперь все чёрные клетки лежат внутри некоторого прямоугольника $n\times m$, в каждой строке и в каждом столбце которого есть хотя бы одна чёрная клетка.

По условию в каждой из n строк стоит ровно одна красная фишка. Тогда всего красных фишек n. Но эти n красных фишек должны находиться в разных столбцах, а значит $m\geqslant n$. Аналогично, рассматривая синие фишки, приходим к выводу, что $n\geqslant m$. Таким образом, $n=m$. Раз красных фишек и столбцов поровну и красные фишки находятся в разных столбцах, то в каждом столбце есть ровно одна красная фишка. Аналогично в каждой строке есть ровно одна синяя фишка.

Рассмотрим верхнюю строку, в ней есть синяя фишка. Рассмотрим столбец с этой синей фишкой. В этом столбце синяя фишка стоит в самой верхней клетке. Получается, что самая верхняя клетка этого столбца оказалась средней по счёту чёрной клеткой в этом столбце. Такое возможно лишь в случае, когда в столбце только одна чёрная клетка.

Ранее доказано, что в любом столбце должна быть ровно одна красная фишка. Рассматривая найденный столбец с единственной чёрной клеткой, приходим к выводу, что красная фишка должна быть в этой клетке. Но в этой клетке уже есть синяя фишка. Таким образом, искомая клетка найдена.

□

Комментарий. Описанные в задаче конструкции существуют, причём не обязательно в каждой строке и в каждом столбце находится ровно одна чёрная клетка. Возможные примеры изображены на рисунке 2.

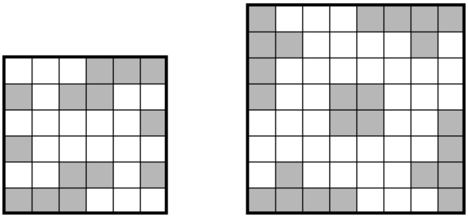
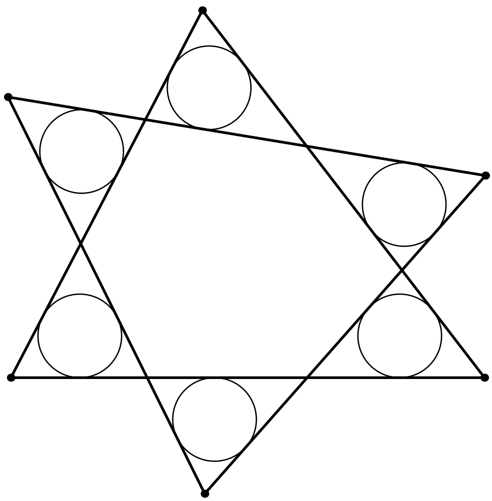


Рис. 2: к задаче 3

Задача 5. Два треугольника пересекаются по шестиугольнику, который отсекает от них 6 маленьких треугольников. Радиусы вписанных окружностей этих шести треугольников равны. Докажите, что радиусы вписанных окружностей двух исходных треугольников также равны.



(2022-62 / Кушнир А.)

Решение. Обозначим радиусы шести равных окружностей через r, а их центры — через A, B, C, D, E, F в порядке обхода против часовой стрелки. Рассмотрим треугольник ACE. Заметим, что если рассмотреть окружность, вписанную в исходный треугольник, содержащий треугольник ACE, а затем уменьшить её радиус на r, оставив центр тем же, то получится окружность, вписанная в треугольник ACE (см. рисунок 3). Аналогично радиус окружности, вписанной в треугольник BDF, на r меньше, чем радиус окружности, вписанной в исходный треугольник, содержащий BDF. Таким образом, утверждение задачи эквивалентно равенству радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACE и BDF.

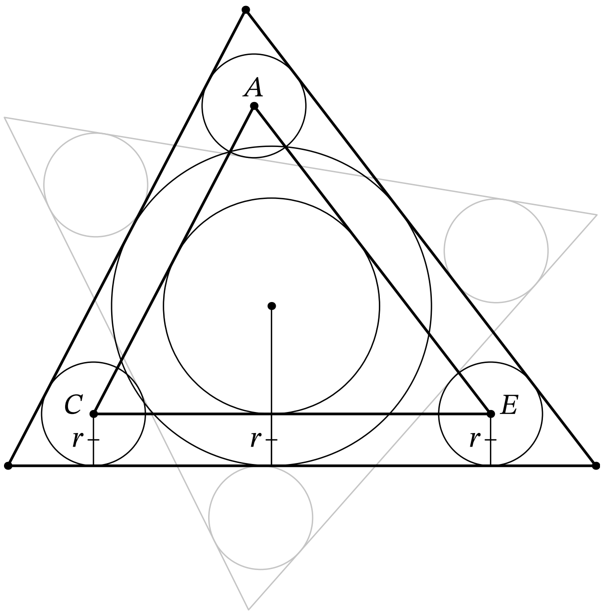


Рис. 3: к решению задачи 5

Опустим перпендикуляры из A на BF, из B на AC и т. д. Обозначим их основания через A_1, B_1, ..., а точку пересечения отрезков AB_1 и A_1B — через X. Несложно видеть, что длины отрезков AA_1, BB_1, ...равны $2r$. Рассмотрим четырёхугольник AA_1B_1B. Он вписанный, поскольку $\angle AA_1B = \angle AB_1B$, а так как $AA_1 = BB_1$, то он является равнобокой трапецией с основаниями AB и A_1B_1. Следовательно, $\triangle AXA_1 = \triangle BXB_1$и $AB_1 = A_1B$. Рассматривая трапеции BB_1C_1C, CC_1D_1D, ..., получаем аналогичные равенства треугольников и отрезков (см. рисунок 4; на нём закрашены три пары равных треугольников из шести).

Несложно видеть, что периметры треугольников ACE и BDF равны:

$$P_{ACE} = AB_1 + B_1C + CD_1 + D_1E + EF_1 + F_1A = A_1B + BC_1 + C_1D + DE_1 + E_1F + FA_1 = P_{BDF}.$$

Также равны площади треугольников ACE и BDF, поскольку при вырезании из них общего шестиугольника остаётся по шесть прямоугольных треугольников, разбивающихся

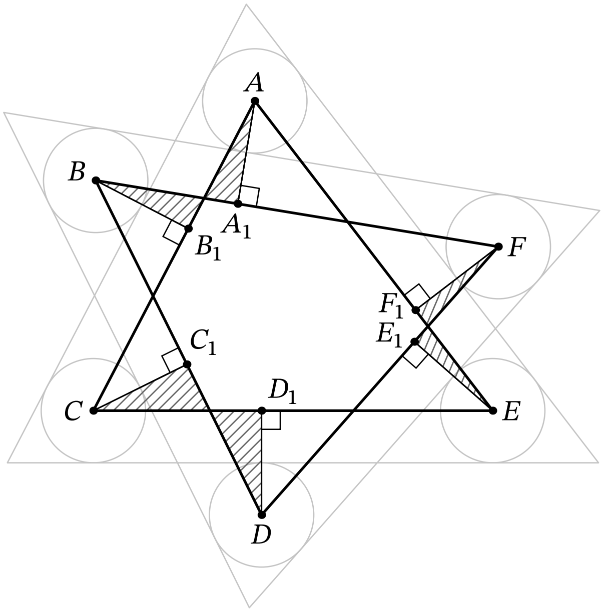


Рис. 4: к решению задачи 5

на пары равных.

Поскольку площадь треугольника равна произведению радиуса окружности, вписанной в треугольник, и полупериметра, то из равенства площадей и равенства периметров двух треугольников следует равенство радиусов вписанных в них окружностей. □

Комментарий. Существуют весьма несимметричные примеры конструкции, описанной в задаче, вроде того, что изображён на рис. 5. В частности, нельзя утверждать ни то, что исходные треугольники равны между собой, ни то, что вписанные в них окружности совпадают (т. е. что шестиугольник пересечения описанный).

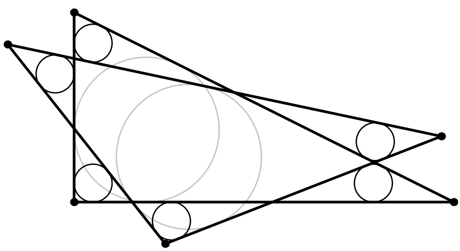


Рис. 5: к решению задачи 5

Задача 6. Даны выпуклый многоугольник M и простое число p. Оказалось, что существует ровно p способов разбить M на равносторонние треугольники со стороной 1 и квадраты со стороной 1. Докажите, что длина одной из сторон многоугольника M равна $p-1$.

(2022-35 / Белухов Н.)

Решение. Назовём *каёмкой* разбиения квадраты и треугольники, имеющие хотя бы одну общую точку с границей многоугольника M. Обозначим через M_1 многоугольник, полученный из M отбрасыванием каёмки. Сделаем несколько наблюдений о каёмке.

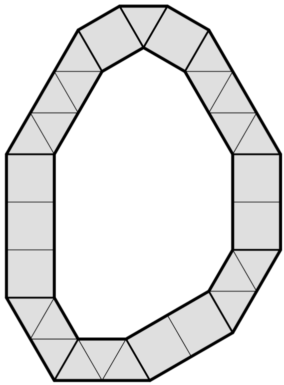


Рис. 6: многоугольник и его каёмка

- Рассмотрим какой-нибудь угол многоугольника M. Поскольку он покрывается одним или несколькими углами правильных треугольников и квадратов, то он может быть равен 60°, 90°, 120°, 150°. Отсюда каждый внешний угол многоугольника не меньше 30°. Но сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°. Поэтому у многоугольника M не более 12 углов, причём их может быть 12 только в случае, если все углы M равны 150°.
- Рассмотрим квадрат или треугольник каёмки, примыкающий к углу, сторона которого лежит на стороне многоугольника. Если это квадрат (см. рис. 7), то несложно видеть, что все оставшиеся фигуры разбиения, которые примыкают к этой стороне, — тоже квадраты, потому что образующиеся углы 90° можно замостить только квадратом (см. рис. 8).

Рис. 7: к решению задачи 6

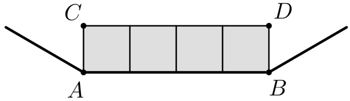


Рис. 8: к решению задачи 6

Если это треугольник (см. рис. 9), то несложно видеть, что все оставшиеся фигуры разбиения, которые примыкают к этой стороне, — тоже треугольники, потому что образующиеся углы 120° можно замостить только двумя треугольниками (см. рис. 10). Таким образом, к каждой стороне многоугольника M примыкают либо только квадраты, либо только треугольники.

Рис. 9: к решению задачи 6

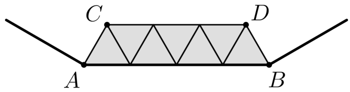


Рис. 10: к решению задачи 6

- Из предыдущего пункта следует, что стороны M_1 будут параллельны соответствующим сторонам M (стороны AB и CD на рисунках). Если у M нет углов по 60° или 90°, то длины сторон M_1 будут либо равны соответствующим длинам сторон M (в случае квадратов), либо на 1 меньше (в случае треугольников). При этом длина стороны может стать равной 0. То есть M_1 — выпуклый многоугольник, у которого сторон не больше, чем у M.

Назовём *характеристикой* многоугольника M набор чисел $(a_1, a_2, \dots, a_{12})$, построенный следующим образом. Если M — 12-угольник, то это длины сторон M, перечисленные в порядке обхода против часовой стрелки. Если у M меньше 12 сторон, то не все его углы равны 150°. Мысленно добавим несколько сторон нулевой длины: если есть угол 120°, то добавим в соответствующую вершину сторону нулевой длины, если есть угол 90°, то добавим в соответствующую вершину две последовательные стороны нулевой длины, если есть угол 60° — три последовательные стороны нулевой длины. Несложно проверить, что в итоге получится 12 сторон, некоторые из которых равны 0. Стороны a_1, a_3, ..., a_{11} будем называть *нечётными*, а стороны a_2, a_4, ..., a_{12} — *чётными*.

Многоугольнику M_1 можно поставить в соответствие набор, построенный по тем же правилам, так, чтобы нумерации сторон в M и M_1 соответствовали друг другу. Посмотрим, как могут быть связаны характеристики M и M_1.

- Пусть длины сторон M отличны от нуля. Тогда все углы M равны 150°. Заметим, что существует два варианта расположить квадрат и треугольник, примыкающие к углу 150° (см. рис. 11).

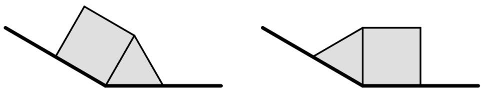


Рис. 11: к решению задачи 6

При выборе одного из вариантов остальная каёмка восстанавливается однозначно. Действительно, сначала восстанавливается часть каёмки, примыкающая к сторонам угла, затем разбиения двух соседних углов и т. д.

Итого получается два варианта каёмки: равносторонние треугольники расположены вдоль всех нечётных сторон, а квадраты — вдоль всех чётных; или наоборот. В первом варианте характеристикой M_1 будет набор $(a_1-1, a_2, a_3-1, a_4, \dots, a_{11}-1, a_{12})$, а во втором — набор $(a_1, a_2-1, a_3, a_4-1, \dots, a_{11}, a_{12}-1)$.

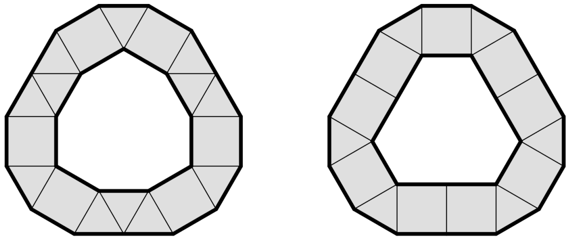


Рис. 12: два варианта каёмки

- Пусть по крайней мере одна нечётная сторона M равна нулю, а все чётные стороны отличны от нуля. Рассмотрим i такое, что $a_i = 0$. Тогда угол при соответствующей вершине в многоугольнике M будет равен 120° (поскольку a_{i-1} и a_{i+1} не равны 0), то есть его единственным образом можно разбить на два равносторонних треугольника. Далее каёмка восстанавливается однозначно. Действительно, достаточно возле всех сторон с нечётными номерами и ненулевой длиной разместить равносторонние треугольники, а возле сторон с чётными номерами и ненулевой длиной — квадраты. Получаем, что характеристика M_1 будет равна $(a_1, a_2-1, a_3, a_4-1, \dots, a_{11}, a_{12}-1)$.
- Пусть по крайней мере одна чётная сторона M равна нулю, а все нечётные стороны отличны от нуля. Аналогично получаем, что характеристика M_1 будет равна $(a_1-1, a_2, a_3-1, a_4, \dots, a_{11}-1, a_{12})$.
- Пусть по крайней мере одна чётная и одна нечётная стороны M равны нулю. Поскольку все ненулевые стороны M_1 параллельны соответствующим сторонам M и имеют такую же или меньшую длину, то по крайней мере одна чётная и одна нечётная стороны M_1 равны нулю.

Отметим, что если по крайней мере одна чётная и одна нечётная стороны M равны нулю, то существует не более одного способа разбить M нужным образом. Действительно, тогда у M найдётся угол, меньший 150°, разбиение которого восстанавливается однозначно. Далее каёмка восстанавливается не более чем одним способом. У многоугольника, полученного отбрасыванием каёмки, каёмка снова восстанавливается не более чем одним способом и т. д.

Обозначим $x = \min\{a_1, a_3, \dots, a_{11}\}$ и $y = \min\{a_2, a_4, \dots, a_{12}\}$. Одно из чисел x или y отлично от нуля, иначе M можно разбить не более чем одним способом. Выделим у многоугольника M каёмку, уменьшающую либо чётные, либо нечётные стороны M (если одно из чисел x или y равно 0, то каёмку можно выбрать единственным способом). Уберём каёмку, останется многоугольник M_1. Выделим какую-нибудь каёмку многоугольника M_1, уберём её и обозначим оставшийся многоугольник через M_2. Будем продолжать так до тех пор, пока хотя бы одна чётная и хотя бы одна нечётная стороны не станут равны нулю. В этот момент характеристика многоугольника будет равна $(a_1 - x, a_2 - y, a_3 - x, a_4 - y, \dots, a_{11} - x, a_{12} - y)$.

Оставшийся многоугольник M_{x+y} не зависит от того, какие именно каёмки были выбраны на предыдущих шагах, поскольку характеристика задаёт не более чем один многоугольник. Поэтому если M_{x+y} нельзя разбить на правильные треугольники и квадраты, то и для M не существует соответствующего разбиения. Следовательно, M_{x+y} можно разбить единственным образом, то есть количество разбиений M равно количеству способов уменьшить оба числа x и y до 0, то есть C_{x+y}^{y}.

По условию задачи $C_{x+y}^{y} = p$, где p — простое число. Докажем, что это может быть только в случае $x+y = p$ и $y = 1$. Заметим, что $x+y \geqslant p$, поскольку иначе C_{x+y}^{y} не может делиться на p. Также x и y отличны от нуля, так как иначе $C_{x+y}^{y} = 1$. Тогда

$$C_{x+y}^{y} \geqslant C_{x+y}^{1} = x + y \geqslant p.$$

Нетрудно видеть, что равенство достигается только при $x = 1$, $y = p - 1$ либо наоборот. В обоих случаях одно из чисел $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ равно $p - 1$, что и требовалось доказать.

$\square$