11 класс, первый день

1. В коллекции Алика есть два типа предметов: значки и браслеты. Значков больше, чем браслетов. Алик заметил, что если он увеличит количество браслетов в некоторое (не обязательно целое) число раз, не изменив количества значков, то в его коллекции будет 100 предметов. А если, наоборот, он увеличит в это же число раз первоначальное количество значков, оставив прежним количество браслетов, то у него будет 101 предмет. Сколько значков и сколько браслетов могло быть в коллекции Алика? (*А. И. Галочкин*)

Решение. Пусть у Алика x значков и y браслетов, а увеличение происходит в n раз. Тогда получаем систему

$$x + ny = 100, \quad nx + y = 101.$$

Складывая и вычитая уравнения и исключая n, получим

$$\frac{201}{x+y} - \frac{1}{x-y} = 2.$$

Это уравнение преобразуем к виду

$$(201 - 2u)(2v + 1) = 201 = 3 \cdot 67,$$

где $u = x + y$, $v = x - y$ — натуральные числа.

Возможны два случая:

1) $2v + 1 = 3$, $201 - 2u = 67$, тогда $x = 34$, $y = 33$, $n = 2$.

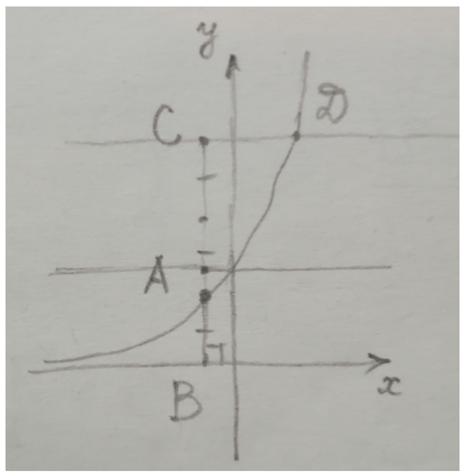
2) $2v + 1 = 67$, $201 - 2u = 3$, тогда $x = 66$, $y = 33$, $n = \frac{34}{33}$.

Ответ. 34 значка и 33 браслета, либо 66 значков и 33 браслета.

2. В декартовой системе координат (с одинаковым масштабом по осям x и y) нарисовали график показательной функции $y = 3^x$. Затем ось y и все отметки на оси x стёрли. Остались лишь график функции и ось x без масштаба и отметки 0. Каким образом с помощью циркуля и линейки можно восстановить ось y? (*М. А. Евдокимов*)

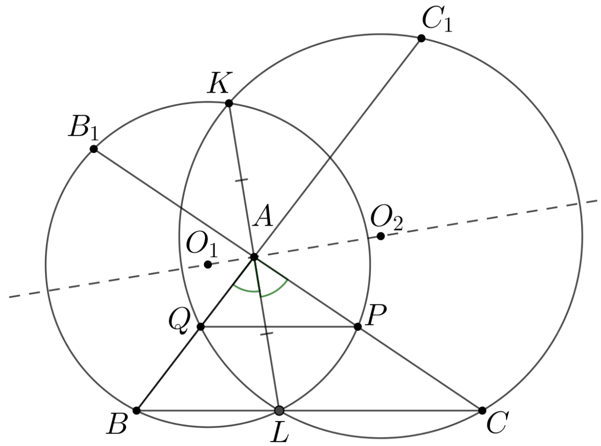
Решение. Отметим на графике произвольную точку A и стандартным образом построим перпендикуляр AB к оси x (см. рис.). На продолжении отрезка BA за точку A отметим такую точку C, что $AC = 2AB$. Далее построим прямую, проходящую через точку C параллельно оси x, и обозначим через D точку её пересечения с графиком. Тогда длина отрезка CD равна 1. Действительно, если A имеет координаты $(x_0, 3^{x_0})$, то ордината точки D равна $3 \cdot 3^{x_0} = 3^{x_0+1}$, поэтому её абсцисса равна $x_0 + 1$.

Отметим теперь на луче BA точку на расстоянии $CD = 1$ от точки B и проведём через неё прямую, параллельную оси x. Она пересечёт график в точке $(0, 1)$, т. е. в той же точке, что и ось y. Для завершения построения остаётся провести через эту точку прямую, перпендикулярную оси x — это и будет искомая ось y.



3. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AL. На продолжении отрезка LA за точку A выбрана точка K так, что $AK = AL$. Описанные окружности треугольников BLK и CLK пересекают отрезки AC и AB в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые PQ и BC параллельны. (*Д. Ю. Бродский*)

Решение.

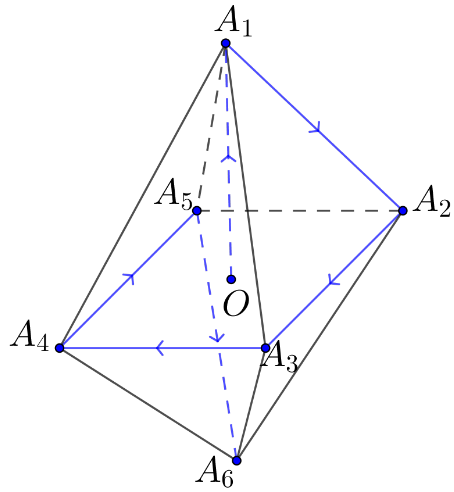


Первый способ. Рассмотрим отрезок KL, он является общей хордой окружностей, описанных около треугольников BLK и CLK. Точка A середина KL, поэтому она лежит на линии центров OO_1 этих окружностей. Продлим BA и CA до пересечения с окружностями в точках C_1 и B_1, соответственно. В силу симметрии получившейся конструкции относительно прямой OO_1 отрезки AB и AC равны отрезкам AB_1 и AC_1 соответственно. Введём следующие обозначения: $BL = m, CL = n, BA = AB_1 = c, CA = AC_1 = b, AQ = x, AP = y$. По свойству секущей $m(m+n) = BL \cdot BC = BQ \cdot BC_1 = (BA - QA) \cdot BC_1 = (c - x)(b + c)$. Аналогично, для секущих CB и CA_1 получаем $n(m + n) = (b - y)(b + c)$. Разделив одно равенство на другое, получим $\frac{m}{n} = \frac{c-x}{b-y}$. По свойству биссектрисы AL треугольника ABC получаем $\frac{m}{n} = \frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$. Отсюда $\frac{c}{b} = \frac{c-x}{b-y}$, или $c(b - y) = b(c - x)$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем $cy = bx$, или $\frac{y}{b} = \frac{x}{c}$, откуда, по обратной теореме о пропорциональных отрезках, следует, $QP||BC$.

Второй способ. Отметим точки B_1 и C_1, симметричные точкам B и C относительно внешней биссектрисы ℓ угла BAC. Так как прямая $\ell \perp KL$, она является серединным перпендикуляром к отрезку KL. Поскольку KL является общей хордой окружностей (BLK) и (CLK), при симметрии относительно ℓ они переходят в себя, поэтому точки B_1 и C_1 лежат на (BLK) и (CLK) соответственно. Заметим, что $AB_1 \cdot AP = KA \cdot AL = AC_1 \cdot AQ$, поэтому четырехугольник B_1QPC_1 — вписанный, поэтому $\angle AQP = \angle C_1B_1A = \angle ABC$, что и доказывает требуемое.

4. Звездолёт находится в полупространстве на расстоянии a от его границы. Экипаж знает об этом, но не представляет, в каком направлении двигаться, чтобы достигнуть граничной плоскости. Звездолёт может лететь в пространстве по любой траектории, измеряя длину пройденного пути, и имеет датчик, подающий сигнал, когда граница достигнута. Может ли звездолёт гарантированно достигнуть границы, преодолев путь длиной не более $14a$? (*М. А. Евдокимов*)

Решение.



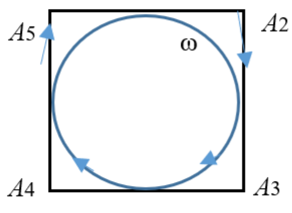
Пусть корабль находится в некоторой точке O. Рассмотрим правильный октаэдр $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, описанный возле шара радиуса a с центром в точке O. Докажем, что путь $O \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5 \to A_6$ заведомо позволит достигнуть граничной плоскости. Предположим противное. Но тогда вершины октаэдра, а значит и сам октаэдр (выпуклая оболочка его вершин), лежат строго внутри полупространства. Поэтому вписанный шар октаэдра, радиус которого равен a, тоже лежит строго внутри полупространства. Получаем противоречие, так как по условию расстояние до граничной плоскости полупространства равно a. Покажем теперь, что длина пути $O \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5 \to A_6$ меньше $14a$. Пусть $OA_1 = OA_2 = OA_3 = x$. Запишем объём пирамиды $OA_1A_2A_3$ двумя способами: $V = \frac{1}{6}x^3 = \frac{1}{3} \cdot OH \cdot S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{(x\sqrt{2})^2}{4}$ Отсюда, $x = a\sqrt{3}$, а длина ребра октаэдра равна $a\sqrt{6}$. Поэтому длина пути равна $(\sqrt{3} + 5\sqrt{6})a < 14a$, так как $\sqrt{2} < 43/30$.

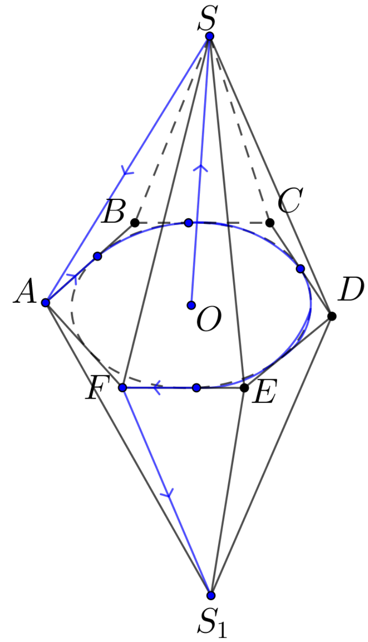
Ответ. Да, может.

Комментарий. Существует много других способов. Также можно придумать пример, в котором длина пути меньше $13a$. Для этого в исходном решении заменим участок пути $A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5$ на приведённый на рисунке ниже (половина стороны квадрата $\to$ полуокружность $\to$ половина стороны квадрата). При этом общая длина пути сократится на $(2 - \frac{\pi}{2}) \cdot a\sqrt{6}$ и будет чуть меньше $13a$. Этот пример подходит, так как выпуклая оболочка точек пути всё ещё содержит вписанный в октаэдр шар радиуса a, поскольку этот шар касается образующей конуса с вершиной A_1 и основанием, которым является вписанная окружность ω квадрата $A_2A_3A_4A_5$).

Можно улучшить оценку примерно до $12{,}75a$, если в плоскости квадрата $A_2A_3A_4A_5$ рассмотреть правильный шестиугольник $ABCDEF$, описанный возле той же самой окружности ω. Путь будет следующим: По отрезку OA_1 по прямой до вершины шестиугольника A, далее по касательной до точки касания с ω, далее по дуге окружности ω, далее по касательной к ω до точки F, далее по отрезку FA_6. Моделирование на компьютере позволяет ещё немного улучшить эту конструкцию, если менять расстояние от точек A_1 и A_6 до плоскости окружности ω и путь в этой плоскости так, чтобы объединение двух соответствующих конусов содержало шар с центром в точке O радиуса a.

Однако улучшение получается незначительным. Если у кого-нибудь из участников олимпиады получится существенно улучшить оценку сверху или получить хорошую оценку снизу, то просьба писать автору задачи по адресу: mmo2022kosmos@mail.ru





5. Дан многочлен степени 2022 с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1. Какое наибольшее число корней он может иметь на интервале $(0;1)$? *(А. Я. Канель-Белов)*

Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n (n — четное) с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом равным 1. Рассмотрим несколько случаев.

1) Если свободный свободный член многочлена $P(x)$ равен нулю (т.е. $P(0)=0$), то на интервале $(0;1)$ он имеет не более $n-1$ корней.

2) Пусть $P(0)\neq 0$. Если многочлен P имеет n корней на интервале $(0;1)$, то значение их произведения, по теореме Виета равное свободному члену, также будет лежать на интервале $(0;1)$, что противоречит условию, что все коэффициенты многочлена P — целые.

Таким образом, многочлен P имеет не более $n-1$ корня на интервале $(0;1)$.

Рассмотрим многочлен $Q(x)=x^nP\left(\frac{1}{x}\right)$. Это многочлен степени n с целыми коэффициентами и свободным членом равным 1. При этом каждому корню x_0 многочлена P, лежащем на интервале $(0;1)$, соответствует корень $\frac{1}{x_0}$ многочлена Q и этот корень лежит на луче $(1;+\infty)$. Верно и обратное: каждому корню многочлена Q, лежащему на луче $(1;+\infty)$, соответствует корень многочлена P, который лежит на интервале $(0;1)$.

Покажем, что существует пример многочлена Q, который имеет ровно $n-1$ корень на луче $(1;+\infty)$.

Многочлен $Q(x)$ имеет вид $1+x(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_{n-1})$. Если c_i — достаточно большие натуральные числа, то многочлен Q имеет целые коэффициенты и имеет $n-1$ корень на луче $(1;+\infty)$. Действительно, рассмотрим, например, многочлен $1+x(x-10)(x-20)\ldots(x-10(n-1))$.

Тогда $Q(5)<0$, $Q(15)>0$, $\ldots$, $Q((n-2)\cdot 10+5)<0$, $Q((n-1)\cdot 10+5)>0$. В рассмотренных n точках многочлен $Q(x)$ принимает значения чередующихся знаков, поэтому он имеет $n-1$ корень на луче $(1;+\infty)$. Эти корни расположены на интервалах $(5;15)$, $(15;25)$,$\ldots$ $(10\cdot(n-2)+5;10\cdot(n-1)+5)$.

Следовательно, соответствующий построенному многочлену Q многочлен P имеет ровно $n-1$ корень на интервале $(0;1)$.

Ответ. 2021 корень.

6. Султан собрал 300 придворных мудрецов и предложил им испытание. Имеются колпаки 25 различных цветов, заранее известных мудрецам. Султан сообщил, что на каждого из мудрецов наденут один из этих колпаков, причём если для каждого цвета написать количество надетых колпаков, то все числа будут различны. Каждый мудрец будет видеть колпаки остальных мудрецов, а свой колпак нет. Затем все мудрецы одновременно огласят предполагаемый цвет своего колпака. Могут ли мудрецы заранее договориться действовать так, чтобы гарантированно хотя бы 150 из них назвали цвет верно? (*А. В. Грибалко*)

Решение. Поскольку $0+1+2+\ldots+24=300$, количества колпаков различных цветов принимают все значения от 0 до 24.

Далее, каждый мудрец считает количество колпаков каждого из цветов. Для двух цветов количества колпаков совпадают и мудрец понимает, что на нём колпак одного из этих двух цветов. Остаётся только сделать выбор, какой именно из этих двух цветов ему назвать.

Договориться (заранее!) о том, как каждому мудрецу делать этот выбор, можно различными способами. Например, можно построить регулярный двудольный граф и воспользоваться *леммой Холла для арабских стран.* Стратегия, приведённая ниже, основана на понятии чётности перестановки.

Пусть мудрецы заранее занумеровали цвета числами от 0 до 24. Тогда истинному распределению колпаков соответствует перестановка

$$\begin{array}{r} \text{номер цвета} \\ \text{кол-во колпаков} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & 24 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_i & \ldots & a_j & \ldots & a_{24} \end{pmatrix}$$

Если мудрец видит равное количество колпаков цвета i и цвета j (по k штук каждого из этих двух цветов), то ему нужно принять решение, к какому из этих двух цветов отнести свой колпак, то есть выбрать между двумя перестановками

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & 24 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & k & \ldots & k+1 & \ldots & a_{24} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & 24 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & k+1 & \ldots & k & \ldots & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Одна из этих перестановок соответствует истинному распределению цветов, при этом указанные перестановки отличаются расположением ровно двух элементов, поэтому имеют разную чётность.

Мудрецы могут заранее договориться, чтобы ровно 150 из них сделали свой выбор в пользу чётной перестановки, а остальные 150 — в пользу нечётной перестановки.

Тогда ровно половина мудрецов верно назовут цвет своего колпака.

Замечание. Стратегия, согласно которой мудрецы заранее договариваются так, что 150 из них выбирают цвет с бóльшим номером (из двух, между которыми нужно сделать выбор), а остальные 150 выбирают цвет с меньшим номером, не гарантирует 150 верных ответов.

Действительно, пусть истинному распределению колпаков соответствует перестановка

$$\begin{array}{r} \text{номер цвета} \\ \text{кол-во колпаков} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 15 & 16 & 17 & 24 & 23 & 22 & 21 & 20 & 19 & 18 \end{pmatrix}$$

и пусть мудрецы, которым достались колпаки цветов 3–17 (их ровно 150 человек), должны выбрать цвет с меньшим номером, а остальные 150 мудрецов — с бóльшим номером. Тогда все мудрецы, кроме мудрецов с колпаками цветов 1, 2 и 24, назовут цвет ошибочно.