10 класс. Решения

1. Найдите наибольшее натуральное n, обладающее следующим свойством: для любого простого нечётного p, меньшего n, разность $n - p$ также является простым числом.

(И. Акулич)

Ответ. 10

Решение. Предположим, что $n > 10$. Заметим, что числа $n - 3$, $n - 5$, $n - 7$ больше трёх, и одно из них делится на три, и следовательно составное. Противоречие.

2. Точки M и N — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Касательная ℓ к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает прямую BC в точке K. Докажите, что описанная окружность треугольника MKN касается ℓ.

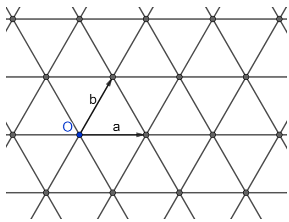
(Д. Бродский)

Решение. По свойству касательной к описанной окружности имеем $\angle BAK = \angle ACK$. Следовательно, треугольники BAK и ACK подобны по двум углам. Поскольку KM и KN — соответствующие медианы в этих подобных треугольниках, имеем $\angle AKM = \angle CKN$. Наконец, поскольку $MN \parallel KC$, имеем $\angle CKN = \angle MNK$. Итак, $\angle AKM = \angle MNK$, и по свойству касательной к описанной окружности получаем, что описанная окружность треугольника MKN касается ℓ, что и требовалось доказать.

3. Среди любых пяти узлов обычной клетчатой бумаги обязательно найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел клетчатой бумаги. А какое минимальное количество узлов сетки из правильных шестиугольников необходимо взять, чтобы среди них обязательно нашлось два, середина отрезка между которыми — тоже узел этой сетки?

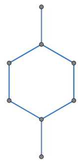
(А. Кулыгин)

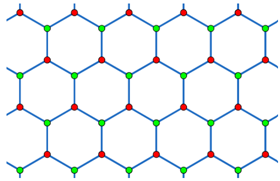
Ответ. 9



Лемма. Среди любых пяти узлов сетки из правильных треугольников найдутся два, середина отрезка между которыми — тоже узел сетки.

Доказательство. Введём начало отсчёта в одном из узлов сетки и обозначим за $\vec{a}$ и $\vec{b}$ радиус векторы к двум ближайшим узлам (см. картинку). Тогда узлы сетки суть точки вида $m\vec{a} + n\vec{b}$ для целых m и n. По принципу Дирихле из пяти точек найдутся две точки $m_1\vec{a}+n_1\vec{b}$ и $m_2\vec{a}+n_2\vec{b}$, у которых одновременно совпадает чётность m_1 и m_2 и чётность n_1 и n_2. Середина отрезка, соединяющего эти две точки, есть точка $\frac{m_1+m_2}{2}\vec{a}+\frac{n_1+n_2}{2}\vec{b}$. Она является узлом сетки в силу одинаковой чётности m_1 и m_2, n_1 и n_2. $\square$





Решение. На первой картинке можно увидеть пример расположения 8 узлов сетки, среди которых нет двух, середина отрезка между которыми — узел сетки. Докажем, что девяти узлов достаточно. Заметим, что шестиугольная сетка разбивается в объединение двух треугольных (см. вторую картинку). По принципу Дирихле среди любых девяти узлов по крайней мере пять окажутся в одной из этих двух треугольных сеток. По лемме среди этих пяти узлов найдутся два искомых.

4. Дан многочлен степени 2022 с целыми коэффициентами и со старшим коэффициентом 1. Какое наибольшее число корней он может иметь на интервале $(0,1)$?

(А. Канель-Белов)

Ответ. 2021

Решение. Если на интервале (0,1) лежат все 2022 корня многочлена, то по теореме Виета свободный член многочлена должен быть равен их произведению, следовательно будет тоже лежать на интервале (0,1) и не будет целым. Докажем, что в качестве примера подойдёт многочлен $P(x) = x^{2022} + (1-4042x)(3-4042x)\dots(4041-4042x)$. Заметим, что при всех $k = 0, 1, \dots, 2021$ число $P\left(\frac{2k}{4042}\right) = \left(\frac{2k}{4042}\right)^n + (-1)^k(2k-1)!!(4041-2k)!!$ является положительным при чётном k и является отрицательным при нечётном k. Таким образом, на интервале (0,1) многочлен $P(x)$ меняется знак по крайней мере 2021 раз, и следовательно имеет хотя бы 2021 корень.

5. Два треугольника пересекаются по шестиугольнику, который отсекает от них 6 маленьких треугольников. Радиусы вписанных окружностей этих шести треугольников равны. Докажите, что радиусы вписанных окружностей двух исходных треугольников также равны.

(А. Кушнир)

Решение. Обозначим радиусы шести равных окружностей через r, а их центры — через A, B, C, D, E, F в порядке обхода против часовой стрелки. Рассмотрим треугольник ACE. Заметим, что если рассмотреть окружность, вписанную в исходный треугольник, содержащий треугольник ACE, а затем уменьшить её радиус на r, оставив центр тем же, то получится окружность, вписанная в треугольник ACE (см. рисунок 1). Аналогично радиус окружности, вписанной в треугольник BDF, на r меньше, чем радиус окружности, вписанной в исходный треугольник, содержащий BDF. Таким образом, утверждение задачи эквивалентно равенству радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACE и BDF.

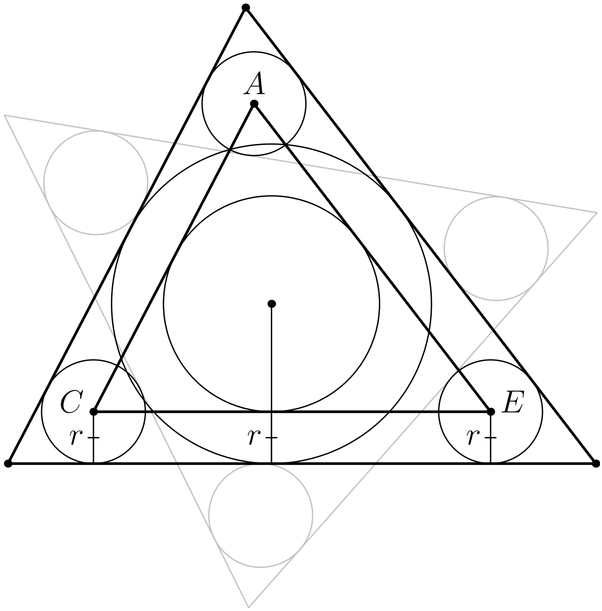


Рис. 1: к решению задачи 5

Опустим перпендикуляры из A на BF, из B на AC и т. д. Обозначим их основания через A_1, B_1, $\ldots$, а точку пересечения отрезков AB_1 и A_1B — через X. Несложно видеть, что длины отрезков AA_1, BB_1, $\ldots$ равны $2r$. Рассмотрим четырёхугольник AA_1B_1B. Он вписанный, поскольку $\angle AA_1B = \angle AB_1B$, а так как $AA_1 = BB_1$, то он является равнобокой трапецией с основаниями AB и A_1B_1. Следовательно, $\triangle AXA_1 = \triangle BXB_1$и $AB_1 = A_1B$. Рассматривая трапеции BB_1C_1C, CC_1D_1D, $\ldots$, получаем аналогичные равенства треугольников и отрезков (см. рисунок 2; на нём закрашены три пары равных треугольников из шести).

Несложно видеть, что периметры треугольников ACE и BDF равны:

$$\begin{multline*} P_{ACE} = AB_1 + B_1C + CD_1 + D_1E + EF_1 + F_1A = \\ = A_1B + BC_1 + C_1D + DE_1 + E_1F + FA_1 = P_{BDF}. \end{multline*}$$

Также равны площади треугольников ACE и BDF, поскольку при вырезании

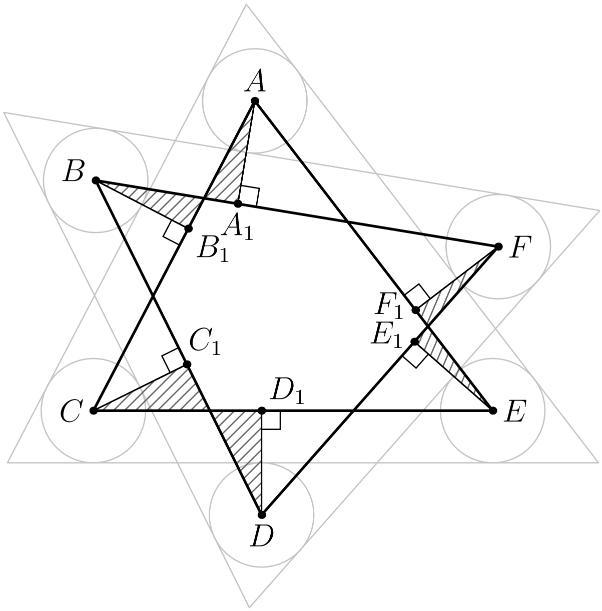


Рис. 2: к решению задачи 5

из них общего шестиугольника остаётся по шесть прямоугольных треугольников, разбивающихся на пары равных.

Поскольку площадь треугольника равна произведению радиуса окружности, вписанной в треугольник, и полупериметра, то из равенства площадей и равенства периметров двух треугольников следует равенство радиусов вписанных в них окружностей.

Комментарий. Существуют весьма несимметричные примеры конструкции, описанной в задаче, вроде того, что изображён на рис. 3. В частности, нельзя утверждать ни то, что исходные треугольники равны между собой, ни то, что вписанные в них окружности совпадают (т. е. что шестиугольник пересечения описанный).

6. Андрей Михайлович выписал на доску все возможные последовательности длины 2022, состоящие из 1011 нулей и 1011 единиц. Назовём две последовательности *совместимыми*, если они совпадают ровно в 4 позициях. Докажите, что Андрей Михайлович может разбить все последовательности на 20 групп так, чтобы никакие две совместимые последовательности не попали в одну группу.

(А. Райгородский)

Решение. Понятно, что совместимые последовательности в двух позициях сов-

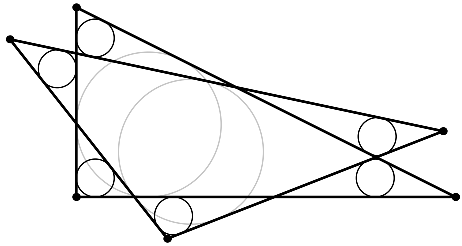


Рис. 3: к решению задачи 5

падают по единицам, а в двух — по нулям. Рассмотрим первые пять позиций. Существует $C_5^3 = 10$ способов поставить три единицы на эти пять позиций. Для каждого из этих десяти способов Андрей Михайлович выделяет группу написанных на доске последовательностей, первые три единицы которых стоят на соответствующих трёх позициях. Таким образом, Андрей Михайлович разбивает на десять групп все написанные на доске последовательности, у которых на первых пяти позициях встречаются хотя бы три единицы. Кроме того, любые две последовательности из одной группы совпадают по единицам хотя бы в трёх позициях, следовательно не являются совместимыми. Аналогично Андрей Михайлович разбивает на десять групп все написанные на доске последовательности, у которых на первых пяти позициях встречаются хотя бы три нуля. А поскольку у каждой последовательности на первых пяти позициях встречаются или три нуля, или три единицы, Андрей Михайлович разбил все последовательности на 20 групп.