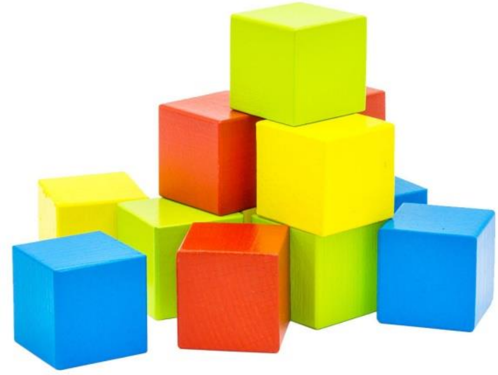
*Александра Нестеренко*

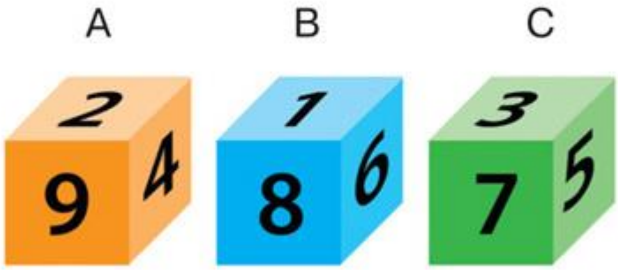
# Нетранзитивные кости

эссе

## 1. Нетранзитивный волчок

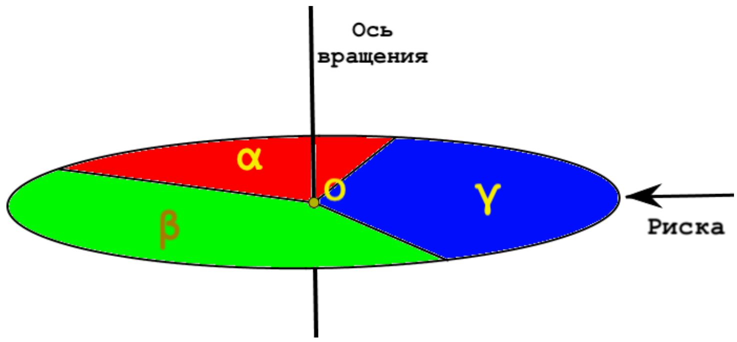
Наверное, детские кубики моей младшей сестры гордятся тем, что у них есть интересные нетранзитивные родственники.






Нетранзитивные кости

Еще у сестры есть волчки. Чтобы они не расстраивались и не завидовали кубикам, придумаем нетранзитивный волчок.




Нетранзитивный волчок

Диск волчка, который крутится вокруг неподвижной вертикальной оси, разделен на три сектора с углами $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Рядом с диском установлена неподвижная риска. За каждым игроком закрепляется сектор: за первым сектор с углом $\alpha$, за вторым – с углом $\beta$ и за третьим – с углом $\gamma$. Играют парами, но по очереди: первый со вторым, второй с третьим и третий с первым. Волчок раскручивают и смотрят, в каком положении он остановится. Чей сектор окажется напротив риски, тот и проиграл.

Будем измерять углы $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ в долях полного оборота, так что $\alpha+\beta+\gamma=1$. Тогда вероятность проигрыша первого игрока второму равна $\alpha$, второго третьему – $\beta$ и третьего первому – $\gamma$.

Обозначим $p_1$, $p_2$ и $p_3$ соответственно вероятности выигрыша первого игрока у второго, второго у третьего и третьего у первого:

$$p_1 = 1-\alpha,\ \ p_2 = 1-\beta,\ \ p_3 = 1-\gamma\,.$$

При $\alpha, \beta, \gamma < \dfrac{1}{2}$ каждая из вероятностей $p_1$, $p_2$ и $p_3$ больше 1/2, то есть игра нетранзитивная. Например, если секторы одинаковые ($\alpha = \beta = \gamma = 1/3$), то

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}\,.$$

У игры с волчком есть свойство: сумма вероятностей выигрышей всегда равна 2:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1-\alpha+1-\beta+1-\gamma = 3-\left(\alpha+\beta+\gamma\right) = 2\,.$$

Предположим, что игроки делят банк размером 1, играя друг с другом по кругу: первый со вторым, второй с третьим, третий с первым, потом опять первый со вторым и так далее. Причем в каждой игре разыгрывается одинаковая сумма, много меньшая, чем 1.

Тогда математическое ожидание доли $S_1$ первого игрока равно трети суммы вероятностей выиграть у второго $p_1$ и у третьего $(1-p_3)$. Аналогично определяются ожидаемые доли других игроков:

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{1+p_1-p_3}{3}, \\ S_2 = \dfrac{1+p_2-p_1}{3}, \\ S_3 = \dfrac{1+p_3-p_2}{3}. \end{cases} \tag{1}$$

Если мы хотим разделить банк в заранее заданном отношении $S_1 : S_2 : S_3$ ($S_3 = 1 - S_1 - S_2$), то можно найти нужные $p_1, p_2$ и $p_3$, решив систему (1) совместно с условием $p_1 + p_2 + p_3 = 2$:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{2}{3} + S_1 - S_2, \\ p_2 = -\dfrac{1}{3} + S_1 + 2S_2, \\ p_3 = \dfrac{5}{3} - 2S_1 - S_2. \end{cases} \tag{2}$$

Теперь, чтобы ответить на вопрос, можно ли получить доли $S_1$ и $S_2$ в нетранзитивной игре, можно подставить $S_1$ и $S_2$ в систему (2), найти вероятности и проверить, выполняются ли условия нетранзитивности

$$\frac{1}{2} < p_1 \le 1,\ \frac{1}{2} < p_2 \le 1,\ \frac{1}{2} < p_3 \le 1. \tag{3}$$

Если подставить вероятности из уравнений (2) в условия (3) и решить полученную систему неравенств, можно определить все множество возможных пар $(S_1, S_2)$. На рис. 1 изображено решение системы.

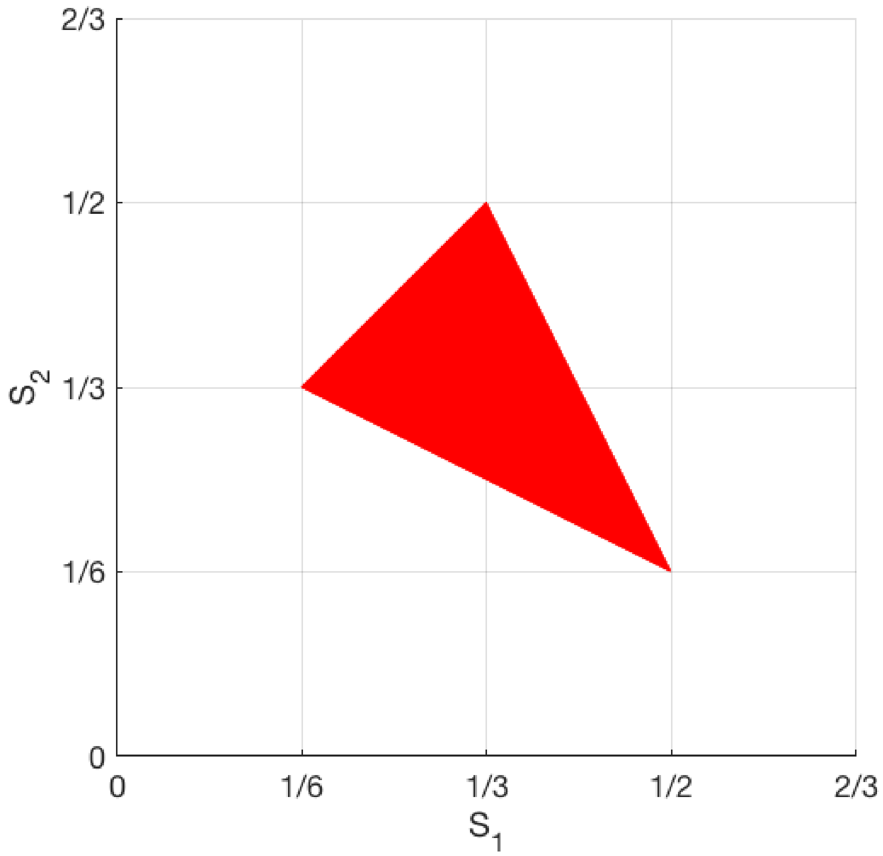



Рис. 1. Решение системы (3) относительно $S_1$ и $S_2$.

Если точка $(S_1, S_2)$ находится внутри красного треугольника, то нетранзитивная игра с волчком для таких долей существует. Достаточно сделать на диске волчка углы

$$\alpha = \frac{1}{3} - S_1 + S_2, \quad \beta = \frac{4}{3} - S_1 - 2S_2, \quad \gamma = 1 - \alpha - \beta. \qquad (4)$$

## Нетранзитивные кости

Потренировавшись с волчком, можно приступить к нетранзитивным костям. Существуют ли такие нетранзитивные кости, что при игре по кругу каждого со следующим получатся заранее заданные ожидаемые доли выигрыша $S_1, S_2$ и $S_3$? Имеется в виду, что у каждого игрока своя кость, и он использует в игре только ее.

Будем рассматривать наборы из трех шестигранных костей: первая кость играет со второй, вторая с третьей, третья с первой. Вероятности выигрышей - $p_1$, $p_2$ и $p_3$ соответственно. Для исключения ничьих примем, что на гранях разных костей не может быть одинаковых чисел. Более того, можно считать, что все 18 чисел различны, а именно, что каждое число от 1 до 18 встречается ровно один раз. Для простоты рассуждений ограничимся именно такими наборами.

Нам понадобится упрощенно представлять набор костей последовательностью их номеров. Построим такую последовательность на примере следующего набора костей.

Рис. 2. Развертки трех костей

Разрежем развертки на отдельные грани и расположим эти грани в строке в порядке убывания чисел на них.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Теперь для вычисления вероятностей выигрыша числа на гранях не нужны, ведь каждая грань бьет любую грань другой кости, стоящую правее. Поэтому числа на гранях заменим номерами костей, на которых эти грани находятся. Получается *представление* набора костей последовательностью номеров этих костей.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 |

Рис.3. Пример представления набора костей

Такого представления достаточно для определения вероятностей $p_1$, $p_2$ и $p_3$. Например, чтобы найти $p_1$, надо для каждой единицы в последовательности найти количество двоек, стоящих правее этой единицы, сложить все эти числа и разделить на произведение количеств единиц и двоек:

$$p_1 = \frac{4\cdot 6}{6\cdot 6} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}, \qquad p_2 = \frac{6\cdot 4}{6\cdot 6} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}, \qquad p_3 = \frac{2\cdot 6 + 4\cdot 2}{6\cdot 6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

По представлению костей всегда можно восстановить набор костей[1] с заданными вероятностями выигрышей $p_1$, $p_2$ и $p_3$. Для этого достаточно пронумеровать числа представления слева направо в порядке убывания и нанести номера единиц на грани первой кости, номера двоек на грани второй и номера троек на грани третьей.

Если в представлении поменять местами соседние неравные номера, то одна из вероятностей $p_1, p_2$ и $p_3$ изменится на 1/36. Например, если в

[1] Единственный с точностью до перестановок граней на каждой отдельной кости.

представлении, изображенном на рис.3, четвертая единица «перепрыгнет» двойку слева направо (рис. 4), получится новая последовательность и новый набор костей, в которой количество фрагментов (12) уменьшится на 1, и, значит, вероятность $p_1$ уменьшится на 1/36 и станет равна 24/36 – 1/36 = 23/36. Вероятности $p_2$ и $p_3$ при этом не изменятся.

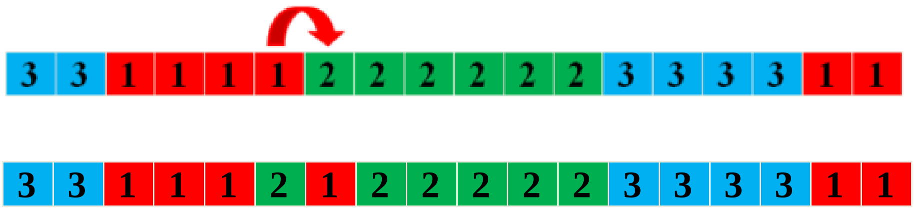
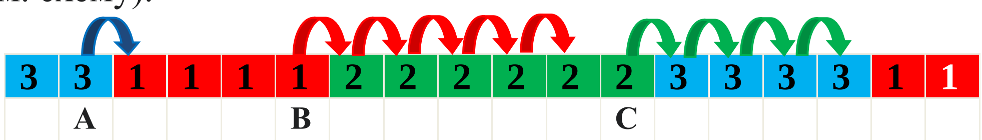



Рис. 4.

Таблица возможных перестановок соседних номеров

| Перестановка | Результат | |
|---|---|---|
| $(12) \to (21)$ | $p_1 \to p_1 - \frac{1}{36}$ | $p_2, p_3$ не меняются |
| $(13) \to (31)$ | $p_3 \to p_3 + \frac{1}{36}$ | $p_1, p_2$ не меняются |
| $(23) \to (32)$ | $p_2 \to p_2 - \frac{1}{36}$ | $p_3, p_1$ не меняются |
| $(21) \to (12)$ | $p_1 \to p_1 + \frac{1}{36}$ | $p_2, p_3$ не меняются |
| $(31) \to (13)$ | $p_3 \to p_3 - \frac{1}{36}$ | $p_1, p_2$ не меняются |
| $(32) \to (23)$ | $p_2 \to p_2 + \frac{1}{36}$ | $p_3, p_1$ не меняются |

Переставим в представлении с вероятностями $p_1 = \frac{24}{36}$, $p_2 = \frac{24}{36}$, $p_3 = \frac{20}{36}$ тройку из позиции A не более чем на 1 шаг вправо, единицу из позиции B – не более чем на 5 шагов вправо, а двойку из позиции C – не более чем на 4 шага вправо (см. схему).




Получится одно из 60 представлений с вероятностями

$$p_1 \in \left\{\frac{24}{36}, \frac{23}{36}, \frac{22}{36}, \frac{21}{36}, \frac{20}{36}, \frac{19}{36}\right\}, \quad p_2 \in \left\{\frac{24}{36}, \frac{23}{36}, \frac{22}{36}, \frac{21}{36}, \frac{20}{36}\right\}, \quad p_3 \in \left\{\frac{20}{36}, \frac{19}{36}\right\}. \quad (5)$$

Среди 60 полученных наборов есть девять пар, которые получаются друг из друга циклической перестановкой $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Поэтому, если считать различными только те наборы нетранзитивных костей, у которых вероятности не могут перейти друг в друга циклическим переименованием костей, то получается 51 различный набор костей.

***

У нетранзитивных костей нет свойства $p_1 + p_2 + p_3 = 2$, как у волчка. Например, суммы вероятностей из (5) могут быть от $\frac{58}{36}$ до $\frac{68}{36}$. Но зато верна следующая теорема.

**Теорема**. Для трех шестигранных нетранзитивных костей выполняется неравенство

$$p_1 + p_2 + p_3 \le \frac{17}{9}. \tag{6}$$

Для доказательства нам понадобится различать представления по количеству идущих подряд групп одинаковых номеров. Вот пример представления, содержащего пять групп.

| 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Гр.1 | | Группа 2 | | | | Группа 3 | | | | | | Гр.4 | | | | Гр.5 | |

Назовем представление (и соответствующий набор) *оптимальным*[2], если сумму вероятностей нельзя увеличить, поменяв местами два каких-нибудь соседних номера. В оптимальном представлении не встречаются фрагменты (21), (32) и (13). Действительно, если какая-нибудь из этих пар есть, номера в ней можно поменять местами, при этом одна из вероятностей $p_1, p_2$ и $p_3$ увеличится на 1/36.

Любое представление можно сделать оптимальным, меняя местами номера в парах (21), (32) и (13), пока ни одной такой пары не останется. При этом ни одна из вероятностей $p_1, p_2$ и $p_3$ не уменьшится, то есть нетранзитивные кости останутся нетранзитивными. Поэтому верно следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Для любого набора костей существует оптимальный набор с не меньшей суммой вероятностей, и для любого нетранзитивного набора костей существует оптимальный нетранзитивный набор с не меньшими вероятностями $p_1, p_2$ и $p_3$.

Для доказательства теоремы понадобятся еще четыре вспомогательных утверждения, доказательства которых даны в конце эссе.

---

[2] Термин заимствован из [1].

**Утверждение 2.** Для любого оптимального набора из трех костей с числом групп $n > 3$ в представлении найдется оптимальный набор из трех костей с числом групп $n-1$ и не меньшей суммой вероятностей $p_1 + p_2 + p_3$.

То есть с увеличением числа групп максимально возможная сумма вероятностей оптимального набора костей не возрастает.

**Утверждение 3.** Максимальная сумма вероятностей для оптимального набора из трех шестигранных костей с количеством групп больше пяти равна 67/36.

**Утверждение 4.** В представлении любого набора из трех нетранзитивных костей не менее 5 групп.

**Утверждение 5.** Максимальная сумма вероятностей для трех нетранзитивных шестигранных костей с представлением из пяти групп равна 17/9.

**Доказательство теоремы.** Возьмем произвольный нетранзитивный набор из трех шестигранных костей. Сделаем, если нужно, его представление оптимальным, меняя местами номера во фрагментах (21), (32) и (13). При этом нетранзитивность сохранится, сумма вероятностей может только увеличиться.

В полученном оптимальном нетранзитивном наборе меньше пяти групп быть не может (утверждение 4). Если групп ровно 5, то сумма вероятностей не больше, чем 17/9 (утверждение 5). Если групп больше пяти, то сумма вероятностей нового набора не больше, чем 67/36 (утверждение 3).

Мы взяли произвольные нетранзитивные кости, преобразовали их, не уменьшив сумму вероятностей, при этом она оказалась не больше 17/9. Значит у любых нетранзитивных костей сумма вероятностей не больше 17/9.

Пример нетранзитивных костей, для которых достигается максимально возможная сумма вероятностей, показан на рис.2.

***

Конечно, для костей остаются верны система уравнений (2) и условия (3), полученные для волчка. Из условия $p_1 + p_2 + p_3 = R$ и системы (2) можно найти вероятности, при которых получатся заданные доли $S_1, S_2$:

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{R}{3} + S_1 - S_2, \\ p_2 = \dfrac{R}{3} - 1 + S_1 + 2S_2, \\ p_3 = \dfrac{R}{3} + 1 - 2S_1 - S_2. \end{cases} \tag{7}$$

Подставляя уравнения (7) в условия (3), получим систему неравенств, связывающих $S_1$ и $S_2$. На рис. 4 показаны решения, найденные графически для нескольких $R$.

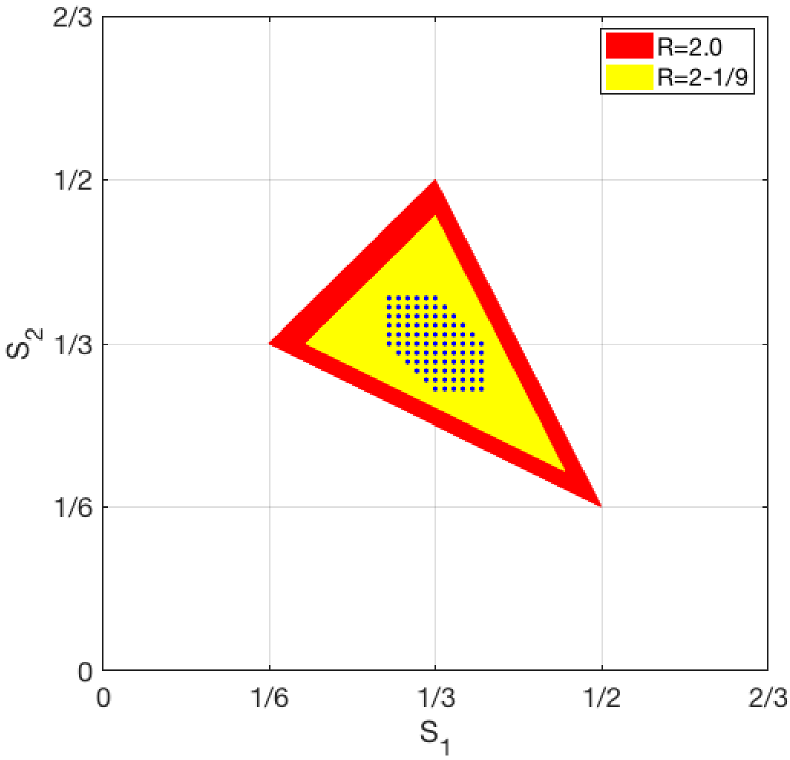



Рис. 4. Допустимые области для пар $(S_1, S_2)$.

Решения для игры с волчком лежат внутри красного треугольника ($R = 2$), для трех шестигранных костей с максимальным значением $R = \frac{17}{9}$ – внутри желтого.

Точки на рис. 4 соответствуют вероятностям из (5) и их циклическим перестановкам $p_1 \to p_2 \to p_3 \to p_1$. На графике 91 точка, одна из которых находится в центре треугольника и соответствует набору нетранзитивных костей с равными вероятностями $p_1 = p_2 = p_3$. Другие лежат в узлах сетки с шагом 1/108.

## Можно ли распределить сумму на кону в отношении 1:2:3?

Для такого отношения игроки должны получить в среднем $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ части банка соответственно. Точки $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ являются вершинами красного треугольника (рис. 4), и они лежат вне разрешенного для костей желтого треугольника. Значит такое распределение долей с тремя нетранзитивными шестигранными костями невозможно.

## Доказательства вспомогательных утверждений 2 – 5

Начиная с этого момента, будем для простоты и определенности считать, что кость, у которой на грани число 18 (наибольшее из всех на трех костях), имеет номер 1. Тогда все возможные представления начинаются с единицы, а в оптимальных представлениях группы чередуются в порядке 12312312… Здесь цифра 1 означает группу, состоящую из единиц, и т.д.

| Представление | 1 1 | 2 2 2 2 | 3 3 3 3 3 3 | 1 1 1 1 | 2 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| Номер группы по порядку | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Обозначение группы и ее длина | $x_1 = 2$ | $y_1 = 4$ | $z_1 = 6$ | $x_2 = 4$ | $y_2 = 2$ |

**Доказательство утверждения 2.** В оптимальном представлении расставим скобки, заключив в них фрагменты, состоящие из трех последовательных групп (123), и последний фрагмент из одной или двух групп, если он есть. Получается одно из трех разбиений

$$(123)(123)...(123),\quad (123)(123)...(123)(12) \text{ или } (123)(123)...(123)(1).$$

Обозначим $x_j, y_j$ и $z_j$ первую, вторую и третью группы в $j$-й скобке. Эти обозначения будем применять не только для самих групп, но и для их длин, поскольку путаницы здесь не возникнет[3]. В таблице выше показан пример.

Тогда представление можно записать $x_1y_1z_1x_2y_2z_2x_3\dots$. Рассмотрим три случая в зависимости от того, какой группой оканчивается представление.

Случай 1. Представление оканчивается группой $z$: $x_1y_1z_1x_2y_2z_2...x_k\ y_kz_k$, общее число групп равно $n = 3k$, где $k \geq 2$.

а) Если $x_1 \leq y_1$ то $x_2 + x_3 + ... + x_k \geq y_2 + y_3 + ... + y_k$. Перенесем группу $z_k$ влево, объединим ее с группой $z_1$ и объединенную группу снова назовем $z_1$

$$x_1y_1\,\mathbf{z_1z_k}\,x_2y_2z_2...x_k\ y_k \to x_1y_1\mathbf{z_1}x_2y_2z_2...x_k\ y_k.$$

Получится оптимальный набор с не меньшей суммой вероятностей и количеством групп $n-1$. Сумма вероятностей не уменьшается, так как каждая тройка из самой правой группы «перешагивает», двигаясь справа налево, не меньше единиц, чем двоек. Значит, вероятность $p_3$ выросла не меньше, чем уменьшилась вероятность $p_2$.

[3] Для длины группы можно было бы ввести дополнительное обозначение вида $l(x_n)$ или $|x_n|$, но это лишь усложнит запись, не добавив строгости. Один и тот же символ часто используется и для объекта, и для его меры. Например, в геометрии длину отрезка *a* обозначают тоже *a*, и это ни у кого не вызывает недоумения.

б) Если $x_1 > y_1$, то перенесем $z_n$ из конца в начало представления:

$$\boldsymbol{z_n}\ x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \ldots x_k y_k$$

Представление остается оптимальным, число групп не изменилось. Сумма вероятностей тоже не изменилась, так как вероятность $p_3$ выросла ровно на столько, на сколько уменьшилась вероятность $p_2$. Теперь первой оказалась группа троек. Циклически переименуем кости (и, стало быть, группы) и снова получим представление $x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \ldots x_k y_k z_k$.

Будем повторять эту процедуру до тех пор, пока на каком-то шагу не окажется, что $x_1 \le y_1$, а это обязательно произойдет: невозможно, чтобы было $x_1 > y_1 > z_1 > \ldots > x_{k+1} > y_{k+1} > z_{k+1} > x_1$. Когда выполнится условие $x_1 \le y_1$, применим процедуру из пункта (а) и получим оптимальные кости с количеством групп $n-1$ и суммой вероятностей, не меньшей, чем была.

Случай 2. Представление оканчивается группой $x$: $x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \ldots x_{k+1}$, общее число групп равно $n = 3k+1$, где $k \ge 1$.

В этом случае между группами $x_1$ и $x_{k+1}$ находится поровну двоек и троек, поэтому группу $x_{k+1}$ можно перенести влево и объединить с группой $x_1$ без изменения суммы вероятностей:

$$\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}+1} y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \ldots z_k \to \boldsymbol{x}_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \ldots z_k .$$

После слияния $x_1$ и $x_{k+1}$ в одну новую группу $x_1$ получается оптимальный набор костей, где сумма вероятностей прежняя, а число групп равно $n-1$.

Случай 3. Представление оканчивается группой $y$: $x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \ldots x_{k+1} y_{k+1}$, общее число групп равно $n = 3k+2$, где $k \ge 1$.

Между группами $y_1$ и $y_{k+1}$ заключены все группы $z$ и все группы $x$, кроме $x_1$. Поэтому единиц между $y_1$ и $y_{k+1}$ меньше, чем троек. Перенесем группу $y_{k+1}$ влево и сольем с группой $y_1$:

$$x_1 \boldsymbol{y}_1 \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{k}+1} z_1 x_2 y_2 z_2 \ldots x_{k+1} \to x_1 \boldsymbol{y}_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \ldots x_{k+1} .$$

Получается оптимальный набор из $n-1$ групп, а сумма вероятностей выросла.

Все случаи исчерпаны. Утверждение доказано.

**Доказательство утверждения 3.** Вначале докажем, что для трех оптимальных шестигранных костей с шестью группами в представлении максимальная сумма вероятностей равна 67/36.

Представление является оптимальным, поэтому группы чередуются в порядке 123123. Обозначим длины первых трех групп $x, y$ и $z$. Тогда длины всех шести последовательно расположенных групп равны

$$x, y, z, (6-x), (6-y) \text{ и } (6-z).$$

Все группы не пустые: $1 \le x \le 5,\ 1 \le y \le 5,\ 1 \le z \le 5$, поэтому

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{6x + (6-x)(6-y)}{36} = \dfrac{36 - 6y + xy}{36}, \\ p_2 = \dfrac{6y + (6-y)(6-z)}{36} = \dfrac{36 - 6z + yz}{36}, \\ p_3 = \dfrac{z(6-x)}{36} = \dfrac{6z - zx}{36}. \end{cases}$$

Сумма вероятностей равна

$$R = p_1 + p_2 + p_3 = 2 + \frac{y(z + x - 6) - zx}{36}.$$

Рассмотрим три случая в зависимости от знака выражения $z + x - 6$.

Случай 1: $z + x - 6 > 0$. Тогда $R$ растет с ростом $y$, поэтому максимум будет при $y = 5$. Перебором возможных значений $x$ и $z$ найдем наибольшее значение выражения $5z + 5x - zx - 30$. Поскольку выражение симметрично, можно считать, что $x \le z$.

| $x$ | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 | 5 |
| $5z + 5x - zx - 30$ | –5 | –7 | –5 | –6 | –5 | –5 |

Случай 2: $z + x - 6 = 0$. Наибольшее значение выражения $-zx$ равно $-5$ и достигается, например, при $x = 1,\ z = 5$.

Случай 3: $x + z - 6 < 0$. $R$ убывает с ростом $y$, поэтому наибольшее значение $R$ принимает при $y = 1$. Найдем наибольшее значение выражения $z + x - 6 - zx$ перебором. Снова пользуясь симметричностью, ограничимся условием $x \le z$.

| $x$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 |
| $z + x - 6 - zx$ | –5 | –5 | –5 | –5 | –6 | –7 |

Во всех трех случаях наибольшее значение $R$ равно $2 - \dfrac{5}{36} = \dfrac{67}{36}$.

В соответствии с утверждением 2 сумма вероятностей оптимальных наборов костей не возрастает с ростом числа групп. Значит, сумма вероятностей выигрыша оптимальных костей с представлением из шести и более групп не превосходит 67/36. Утверждение доказано.

**Доказательство утверждения 4**. Меньше трех групп быть не может, так как костей три. Если групп три, то самая правая не бьет никакую другую: $p_3 = 0$, и поэтому набор не является нетранзитивным.

Предположим, что групп четыре. Тогда две из них содержат все грани двух соответствующих костей. Две оставшиеся группы содержат все грани третьей кости. Если представление, в котором четыре группы, начинается с номера 1, то и заканчиваться оно должно номером 1, поскольку в противном случае кость 3 не может выигрывать у кости 1. Получается единственный возможный случай последовательности групп 1231.

| Представление | **1** | **...** | **1** | **2** | **...** | **2** | **3** | **...** | **3** | **1** | **...** | **1** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Длина группы | $x_1$ | | | $y_1 = N_2$ | | | $z_1 = N_3$ | | | $x_2$ | | |

Здесь $N_1, N_2$ и $N_3$ – количества граней у костей 1, 2 и 3 соответственно, и $x_1, y_1, z_1$ и $x_2$ – длины групп с первой по четвертую.

Тогда

$$p_1 + p_3 = \frac{x_1 y_1}{N_1 N_2} + \frac{z_1 x_2}{N_3 N_1} = \frac{x_1 N_2}{N_1 N_2} + \frac{N_3 x_2}{N_3 N_1} = \frac{x_1 + x_2}{N_1} = \frac{N_1}{N_1} = 1.$$

Раз так, то числа $p_1$ и $p_3$ не могут одновременно быть больше 0,5, а это противоречит нетранзитивности.

Таким образом, групп не меньше пяти. Утверждение доказано.

**Доказательство утверждения 5**. Если представление из пяти групп задает нетранзитивные кости с максимальной суммой вероятностей, то это представление правильное: группы следуют в порядке 12312. В противном случае представление получилось бы неоптимальным, а это противоречит тому, что сумма вероятностей максимальная.

Значит, третья по счету группа содержит шесть граней, поэтому имеет длину 6. Обозначим длины первых двух групп $x$ и y. Тогда длины групп в порядке их следования таковы:

$$x, y,\ 6,\ (6-x),\ (6-y)\ .$$

Получаем систему

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{6x + (6-x)(6-y)}{36}, \\ p_2 = \dfrac{6y}{36}, \\ p_3 = \dfrac{6(6-x)}{36}, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} p_1 = 1 - \dfrac{6y - xy}{36}, \\ p_2 = \dfrac{y}{6}, \\ p_3 = 1 - \dfrac{x}{6}. \end{cases}$$

Условия нетранзитивности (3) принимают вид:

$$\begin{cases} 18-6y+xy>0, \\ y>3, \\ x<3. \end{cases}$$

Проверим выполнение этих условий при всех возможных $x, y$.

| $x$ | 1 | 1 | 2 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 5 | 4 | 5 |
| $18-6y+xy$ | –2 | –7 | 2 | –2 |

Единственное целое решение $x=2,\ y=4$. При этом

$$p_1+p_2+p_3=2+\frac{x(y-6)}{36}=2-\frac{2\cdot 2}{36}=\frac{17}{9}.$$

Утверждение доказано.

## Ссылки по теме


1. И. И. Богданов, «Нетранзитивные рулетки», Математическое просвещение, сер. 3, 14, Изд-во МЦНМО, М., 2010, 240–255, http://www.mathnet.ru/links/ccde4171b6a00a71d9b1cd78bc4e51c8/mp346.pdf
2. М. Гарднер. Нетранзитивные парадоксы. В кн. «Путешествие во времени». М.: Мир, 1990.

*Ожогин Михаил*

**Взаимовыгодная лотерея**

эссе

Для того чтобы устроить лотерею, которая будет привлекательна одновременно и для устроителя, и для игрока, необходимо, чтобы одновременно выполнялись два обязательных условия: превышение цены билета над математическим ожиданием выигрыша и высокая вероятность выигрыша. Если мы проводим лотерею с обязательным выигрышем в каждом билете, то при условии превышения цены билета над математическим ожиданием покупатель потеряет на каждом билете разницу между стоимостью и математическим ожиданием. Такая лотерея, с одной стороны, привлекательна для покупателя, так как гарантирует выигрыш покупателя, с другой стороны, является ограничивающим фактором, так как не обеспечивает получение дохода. Значит, вероятность выигрыша должна быть менее 1, но максимально большая (как минимум в каждом втором билете). Ограничиваем вероятность выигрыша пределами от 0,9 до 0,99; при таких показателях устроитель гарантирует себе доход от продажи лотереи, а покупатель – высокую вероятность покупки лотереи с выигрышем и при этом с доходом от участия в лотерее. Именно такую лотерею можно назвать взаимовыгодной. Самый оптимальный пример взаимовыгодной лотереи.

Количество билетов в продаже: 100 билетов.
Стоимость одного билета 100 руб.
Приз в одном выигрышном билете: 9999: 99 = 101 руб.
Математическое ожидание выигрыша 99,99 руб.
Вероятность выигрыша 0,99.
Доход устроителя: $(100-99{,}99)\cdot 100 = 1\,\text{руб}$.
Количество выигрышных билетов: $100\cdot 0{,}99 = 99$.
Призовой фонд 9999 руб.

То есть один участник окажется без выигрыша, а стоимость купленного им билета составит доход остальных участников акции и доход устроителя от проведения акции. Стоимость билета без выигрыша будет частично направлена в призовой фонд и составит доход покупателя сверх стоимости купленного им билета. В билете без выигрыша 1 рубль – это доход устроителя, а 99 руб. – доход остальных участников акции.

Выгодная лотерея для устроителя – это лотерея, приносящая прибыль устроителю, то есть призовой фонд должен быть ниже выручки от реализации билетов.

Выгодная лотерея для игрока – это лотерея с высокой вероятностью выигрыша, в которой затраты на приобретение билета ниже выигрыша в каждом билете.

**Комментарий**. Действительно, превышение стоимости билета над математическим ожиданием выигрыша не исключает высокую вероятность выигрыша, превышающую стоимость билета. Михаил предложил немного экстремальную лотерею, которая в реальности не может существовать, поскольку из выручки устроители оплачивают печать и распространение билетов, налоги, сборы, аренду и обслуживание помещений и т.д. Тем не менее, как иллюстрация существования взаимовыгодной лотереи, этот пример довольно яркий.

## Бросание кости до первой шестерки

**Задание**. На открытом уроке учительница математики моделировала геометрическое распределение[1] для иллюстрации распределения случайной величины «число попыток до достижения первого успеха». Она попросила каждого ученика бросать кубик до тех пор, пока не выпадет шестерка, и записать, сколько на это потребовалось бросков. Каждый ученик должен был повторить этот эксперимент три раза. Набор полученных чисел дал распределение случайной величины «число бросков до первой шестерки».

На уроке присутствовала другая учительница, которая решила повторить такую работу в своем классе. Она заметила, что у некоторых учеников три шестёрки выпали довольно быстро, и они бездельничали, поджидая, пока невезучие одноклассники их нагонят.

Поэтому вторая учительница усовершенствовала опыт: она попросила каждого из своих учеников бросать кубик ровно пять минут, отмечать выпадение шестерок и каждый раз записывать, через сколько бросков случилась очередная шестерка. После этого она взяла все числа, записанные школьниками, и тоже построила распределение величины «число бросков до первой шестерки».

Действительно ли два этих опыта моделируют одно и то же геометрическое распределение? Если они различаются, то каким образом и почему?

Для написания эссе на эту непростую тему потребуется довольно много экспериментировать. Для экспериментов можно использовать готовые программы для бросания игральных костей или даже обычный Excel.

## Эссе Александры Нестеренко

В первом эксперименте честно моделируется распределение длин серий до первой шестерки. Если длина серии (включая конечную шестерку) $k$, то вероятность такой серии $g_k = pq^{k-1}$, где $p = 1/6,\ q = 1 - p = 5/6$.

Во втором эксперименте моделируется какое-то другое распределение $R$. Представим себе, что вторая учительница дала на эксперимент не 5 мин, а так мало времени, что хватит сделать только один бросок кости. Тогда примерно у шестой части учеников выпадет шестерка, и они сообщат, что число бросков до шестерки – единица. Все остальные ученики не сообщат ничего. Мы должны заключить, что вероятность шестерки после одного броска равна 1, после двух и больше бросков – 0.

Если времени хватит на два броска, то не равные нулю вероятности будут для чисел бросков 1 и 2, равные нулю – для всех чисел бросков, больших, чем 2. Из этого можно сделать несколько выводов.

1. Вероятность серии длины $k$ из второго эксперимента зависит не только от $k$ но и от числа бросков $L$, которое успеет сделать ученик, то есть распределение $R$ имеет параметры $p$ и $L$: $R = R(L, p)$ Обозначим функцию вероятности этого распределения $r_{L,k}$:

$$r_{L,k} = \mathrm{P}(X = k), \text{ если } X \sim R(L, p).$$

[1] Название связано с тем, что вероятности в этом распределении образуют геометрическую прогрессию с первым членом $p$ и со знаменателем $q = 1 - p$ ($p$ и $q$ — традиционные обозначения вероятностей успеха и неудачи в каждом отдельном испытании).

2. Во втором эксперименте по сравнению с первым завышается вероятность коротких серий и занижается вероятность длинных серий.

3. $r_{1,1}=1$. Можно вычислить вероятность $r_{L,L}$. Если $N$ учеников делают по $L$ бросков, то математическое ожидание количества учеников, которые сообщат о длине серии $L$ равно $pq^{L-1}N$ (это вероятность элементарного исхода длиной $L$ в опыте до первого успеха, умноженная на количество опытов). В среднем за $L$ бросков будет $Lp$ успехов. Поэтому ученики сообщат о в среднем $LpN$ экспериментах до первого успеха. Тогда

$$r_{L,L}=\frac{pq^{L-1}N}{LpN}=\frac{q^{L-1}}{L}.$$

Если во втором эксперименте число бросков ограничено шестью и измеряется вероятность серии до первого успеха длины 6, то вероятность серии длины 6, совпадает с геометрической:

$$r_{6,6}=\frac{qp^5N}{6pN}=pq^5=g_6.$$

Обозначим $\delta_{L,k}$ относительное отклонение $r_{L,k}$ от $g_k$:

$$\delta_{L,k}=\frac{r_{L,k}-g_k}{g_k}=\frac{r_{L,k}}{g_k}-1.$$

Уже выяснилось, что

$$\delta_{1,1}=\frac{r_{1,1}}{g_1}-1=\frac{1}{p}-1,\ \delta_{6,6}=0 \text{ и } \delta_{L,L}=\frac{r_{L,L}}{g_L}-1=\frac{1}{pL}-1=\frac{1/p-L}{L}.$$

В числителе выражения для $\delta_{L,L}$ заменим $L$ переменной $k$ и положим

$$\delta_{L,k}=\frac{1/p-k}{L}. \qquad (1)$$

Формула (1) дает правильное значение относительного отклонения для случаев, когда измеряется вероятность серии до первого успеха той же длины, что разрешенное число бросков. Но (1) имеет и другие достоинства.

1. Для данной длины серии $k$ отклонение $R(L,p)$ от геометрического распределения $G(p)$ уменьшается с ростом $L$. А это и ожидалось. Ведь если последовательность бросков очень длинная, уже не важен вклад одной серии до первой шестерки, которая не завершена и отброшена.

2. Формула (1) правильно показывает, что вероятность для малых длин серий больше, а для больших – меньше по сравнению с вероятностями геометрического распределения.

3. Формула (1) простая. Если бы надо было придумать выражение, которое меняет знак с ростом $k$ и уменьшается с ростом $L$, то проще, чем $\dfrac{Const-k}{L}$ не получилось бы, наверное.

Примем формулу (1) в качестве рабочей гипотезы для относительного отклонения $\delta_{L,k}$. Если гипотеза (1) верна, то функция вероятности распределения $R(L,p)$ из второго эксперимента равна

$$r_{L,k} = \left(\delta_{L,k} + 1\right) g_k = \frac{\frac{1}{p} + L - k}{L} pq^{k-1} = \frac{\left(L-k\right)p+1}{L} q^{k-1} \qquad (2)$$

при $k = 1, 2, \ldots, L$.

Используем гипотезу (1), чтобы сравнить эксперименты двух учительниц количественно. Я провела свой опыт, чтобы определить, сколько раз успею бросить кость за пять минут, если при этом записываю числа бросков до очередной шестерки. Мой результат 103 броска.

Если в классе 25 человек, то в первом эксперименте было ровно $N_1 = 25 \cdot 3 = 75$ серий до первой шестерки, а во втором примерно $N_2 = 25 \cdot 103/6 \approx 429$ серий. Функция вероятности во втором эксперименте равна

$$r_{103,k} = \frac{\left(103-k\right)/6+1}{103} \cdot \frac{5^{k-1}}{6^{k-1}} = \frac{109-k}{103} \cdot \frac{5^{k-1}}{6^k}.$$

Обозначим $\gamma_k$ частоту серии до первой шестерки длины $k$, которая измеряется в первом эксперименте. Будем следить за какой-то фиксированной длиной серии $k$. В первом эксперименте каждый из $N$ учеников сообщает свои три длины серии. Нас интересуют только серии длины $k$, поэтому можно считать сообщение о серии такой длины успехом (У), а сообщение о серии любой другой длины – неудачей (Н). Тогда последовательность из $N_1$ сообщений вида

ННУННННННННУН...УН

будет элементарным исходом эксперимента первого типа, и

$$\gamma_k = \frac{\textit{количество успехов в элементарном исходе}}{N_1}.$$

Серии из постоянного количества испытаний описываются схемой Бернулли. Поэтому для оценки разброса $\gamma_k$ можно пользоваться дисперсией частоты для схемы Бернулли $\mathrm{D}\gamma_k = \frac{g_k\left(1-g_k\right)}{N_1}$.

Для количественной оценки разброса результатов первого эксперимента возьмем коэффициент вариации, то есть отношение стандартного отклонения к ожидаемому количеству серий длины $k_0$:

$$cv\left(\gamma_k\right) = \frac{1}{g_k} \cdot \sqrt{\frac{g_k\left(1-g_k\right)}{N_1}} = \sqrt{\frac{1-g_k}{N_1 g_k}}.$$

Второй эксперимент к схеме Бернулли не сводится, так как здесь нет постоянного числа испытаний. Но для оценки, наверное, можно считать, что количество сообщений об успехе близко к $N_2 = 429$, и для приближения также использовать биномиальное распределение. Поэтому

$$cv(\rho_k) = \sqrt{\frac{1 - r_{103,k}}{N_2 r_{103,k}}},$$

где $\rho_k$ – частота серий длины $k$ во втором эксперименте. В таблице даны результаты вычислений для $k$ от 1 до 10. Рассеивание во втором эксперименте меньше, чем в первом. Этого и следовало ожидать, так как $N_2$ больше, чем $N_1$ в четыре с лишним раза. Но рассеивание частот при моделировании геометрического распределения намного больше, чем разность между вероятностями распределений. Отсюда можно сделать два вывода.

| Длина серии $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g_k$ | 0,167 | 0,139 | 0,116 | 0,096 | 0,080 | 0,067 | 0,056 | 0,046 | 0,039 | 0,032 |
| $r_{103,k}$ | 0,175 | 0,144 | 0,119 | 0,098 | 0,081 | 0,067 | 0,055 | 0,046 | 0,038 | 0,031 |
| $\delta_{103,\,k}$ | 0,048 | 0,039 | 0,029 | 0,019 | 0,010 | 0 | -0,01 | -0,019 | -0,029 | -0,039 |
| $cv(\gamma_k)$ | 0,26 | 0,29 | 0,32 | 0,35 | 0,39 | 0,43 | 0,47 | 0,52 | 0,58 | 0,63 |
| $cv(\rho_{103,k})$ | 0,10 | 0,12 | 0,13 | 0,15 | 0,16 | 0,18 | 0,20 | 0,22 | 0,24 | 0,27 |
| $\dfrac{\lvert g_k - r_{103,k}\rvert}{\sqrt{D\gamma_k}}$ | 0,194 | 0,128 | 0,088 | 0,045 | 0,020 | 0,001 | 0,031 | 0,021 | 0,034 | 0,064 |

Во втором эксперименте невозможно заметить, что моделируется распределение, отличающееся от геометрического.

«Нечестный» второй эксперимент в данных условиях может измерять геометрическое распределение даже с большим успехом, чем «честный» первый.

***

На рис.1 показаны результаты численного моделирования второго эксперимента для $N_2 = 10000$ учащихся и количества бросков $L = 100$.

Красными точками показаны частоты длин серий, полученные при моделировании второго эксперимента. Синяя линия – график вероятности $g_k = pq^{k-1}$. Вероятность в геометрическом распределении и частота $\rho_{100,k}$ серий различаются не сильно, и видна закономерность: при $k < 6$ частота $\rho_{100бk}$ выше соответствующей вероятности геометрического распределения, при $k > 6$ – ниже. Это подтверждает вывод, что в условиях второго эксперимента вероятность по сравнению с геометрическим распределением перераспределяется в пользу коротких серий за счет длинных.

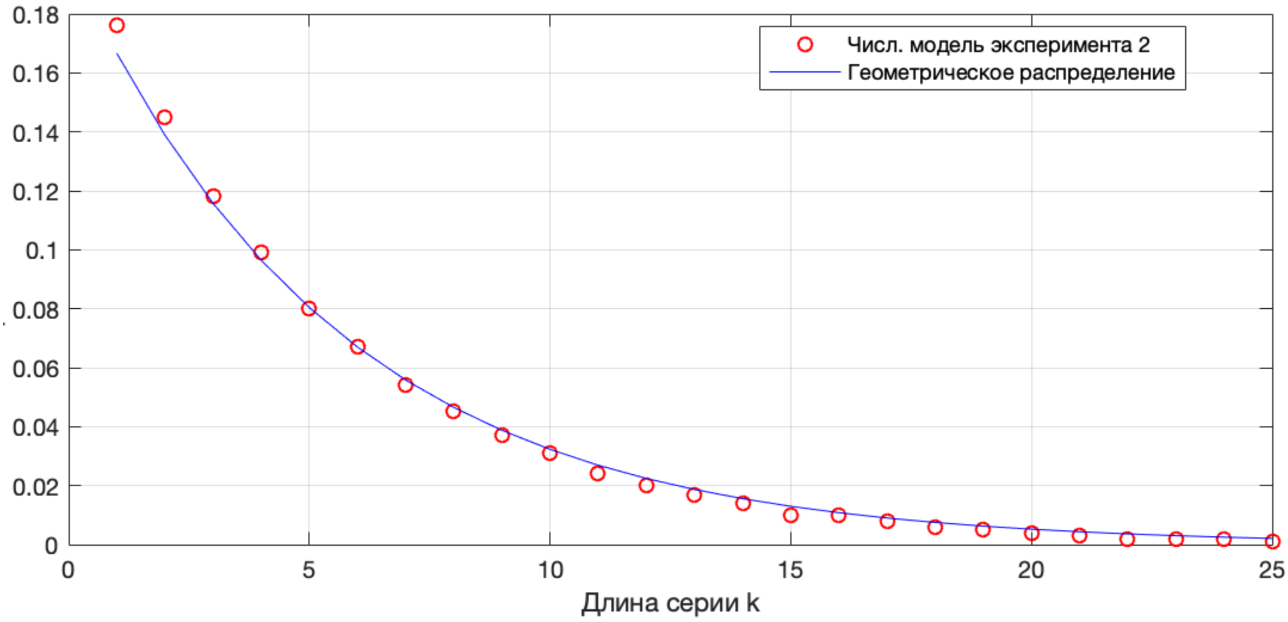



Рис.1.

Гораздо лучше различия между распределениями видны на графике относительной погрешности (рис.2).

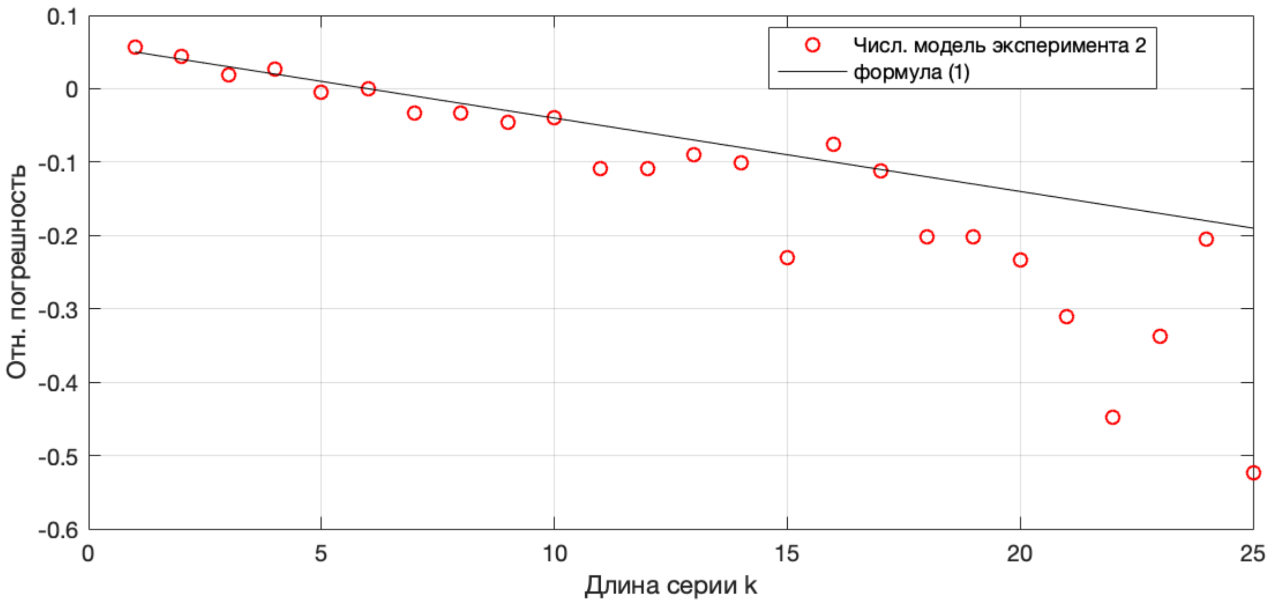



Рис.2.

Красные точки на рис. 2 – это относительное отклонение частот серий в численной модели от геометрической вероятности. Черная прямая – график гипотетического относительного отклонения, вычисленного по формуле (1). При не очень больших длинах серий ($k$ < 15), точки лежат близко к прямой, при больших длинах серий разброс точек становится слишком большим и трудно сказать что-то определенное.

**Комментарий**. Когда в олимпиаду этого года я предлагал эссе о различиях двух распределений, меня вдохновляла совершенно реальная ситуация. Часто учителя, проводящие у себя в классе практическую работу, допускают именно эту ошибку: не фиксируют количество серий бросков до шестерки, а позволяют школьникам бросать кость «до свистка», отбрасывая затем конечные броски, не давшие шестерку.

При этом я не без оснований полагал, что получающееся распределение, если можно так выразиться, обрезанное геометрическое с функцией вероятности

$$r_{L,k} = \mathrm{E}\frac{X_k}{Y} = \frac{pq^{k-1}}{1-q^L} \text{ при } k = 1, 2, ..., L \text{ и } r_{L,k} = 0 \text{ при } k > L,$$

где $L$ – число бросков, которое экспериментатор успел сделать до окончания отведенного времени[2], $X_k$ – число серий длины $k$, окончившихся шестеркой, а $Y$ – общее случившееся количество серий, окончившихся шестеркой, во всей последовательности из $L$ бросков.

Когда я говорю «не без оснований», я имею в виду, что это действительно так, если мы имеем одну последовательность из $L$ бросков, и вычисляем $r_{L,k}$ как отношение числа $X_k$ серий, давших шестерку при $k$ броске, к общему количеству $Y$ серий, окончившихся шестеркой. Это можно доказать с помощью несложной комбинаторики или понять из симметрии: вопрос эквивалентен вопросу о том, какова вероятность того, что первая серия в такой последовательности будет иметь длину $k$.

Иными словами, если бы вторая учительница попросила каждого из своих учеников в своем индивидуальном эксперименте подсчитать отношение числа серий длины $k$ к общему числу серий, окончившихся шестеркой, а потом усреднила бы все полученные частоты, то получила бы что-то близкое к тому, что написано выше.

Поэтому, получив эссе Александры Нестеренко, я решил, что где-то ошибка. Во всяком случае, гипотеза о том, что относительное отклонение распределения второй учительницы от геометрического равно $\delta_{L,k} = \frac{6-k}{L}$ уж точно, как мне казалось, не выдерживает критики: она не согласуется с распределением $r_{L,k} = \frac{pq^{k-1}}{1-q^L}$ и не может быть получена из сравнения одной-единственной пары известных вероятностей.

Однако, разбираясь в тексте, я понял, что не могу найти ошибку. Тогда я занялся компьютерным моделированием, которое раз за разом подтверждало Сашину правоту, а вовсе не мою.

Несколько раз проделывая одни и те же выкладки и рассуждения, я искал ошибку уже у себя, и, наконец, нашел. Ошибка оказалась поучительной. Дело в

[2] Во избежание путаницы в комментарии оставляю все буквенные обозначения из текста эссе.

том, что данные не являются частотами из повторяющихся последовательностей бросков, а частота собирается сразу по всему классу, где кости бросают ученики с номерами $i$ от 1 до $N$, и каждый из них получает в результате своей деятельности $Y_i$ серий, из которых $X_{i,k}$ имеют длину $k$. И тогда частотная оценка вероятности зависит от всех $Y_i$ и $X_{i,k}$, то есть искомое распределение, имеет не параметр $L$ «число сделанных бросков», а векторный параметр $\boldsymbol{L} = (L_1, L_2, ..., L_N)$, содержащий длины всех последовательностей бросков, выполненных классом, а, значит, еще и параметр $N$ «число учащихся». Таким образом, получается не одно, а целое семейство распределений $R(N, \boldsymbol{L}, p)$, а оценки вероятностей какого-то из этих распределений, сделанные второй учительницей, равны

$$\hat{r}_{\boldsymbol{L},k} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_{i,k}}{\sum_{i=1}^{N} Y_i}.$$

Говоря о каком-то распределении, я имею в виду то, которое получается при конкретном числе учащихся $N$ и случившемся $\boldsymbol{L}$.

Чтобы хоть как-то понять, с чем мы имеем дело, разумно найти предельное распределение этого семейства при $N \to \infty$, считая, что все случайные компоненты $L_i$ имеют одинаковое распределение с математическим ожиданием $\mathrm{E}L$. Переходя к пределу по вероятности, получаем:

$$r_{\mathrm{E}L,k} \xleftarrow[N\to\infty]{P} \hat{r}_{\boldsymbol{L},k} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_{i,k}}{\sum_{i=1}^{N} Y_i} \xrightarrow[N\to\infty]{P} \frac{\mathrm{E}\sum_{i=1}^{N} X_{i,k}}{\mathrm{E}\sum_{i=1}^{N} Y_i} = \frac{\mathrm{E}X_k}{\mathrm{E}Y} = \frac{\mathrm{E}X_k}{p\mathrm{E}L},$$

Предпоследнее равенство вытекает из естественного предположения, что все величины $X_{i,k}$ имеют одно и то же распределение с математическим ожиданием $\mathrm{E}X_k$ ($X_k$ – число серий длины $k$ в случайной бинарной последовательности, полученной случайным школьником) и что все величины $Y_i$ также распределены одинаково и имеют математическое ожидание $\mathrm{E}Y$ ($Y$ – общее число серий в этой случайной бинарной последовательности).

Обозначим среднее число бросков $\mathrm{E}L$, сделанных учеником, просто буквой $L$. Это, конечно, нехорошо, но не вызывает путаницы и согласуется с обозначением из Сашиного эссе. Тогда предельное распределение $R$ получает параметр $L$, и закон больших чисел вкупе с единственностью предела обеспечивает для предельного распределения функцию вероятности

$$r_{L,k} = \frac{\mathrm{E}X_k}{pL}.$$

Числитель правой части можно вычислить непосредственно:

$$\mathrm{E}X_k = \left(\left(L-k\right)p+1\right)pq^{k-1}, \text{ откуда } r_{k,L} = \frac{\left(L-k\right)p+1}{L}q^{k-1},$$

что совпадает с выражением (2), полученным Сашей Нестеренко на основе гипотетической формулы относительного отклонения

$$\delta_{L,k} = \frac{1/p-k}{L},$$

которую Саша сформулировала, сравнив лишь числа $r_{L,L}$ и $g_L$, и о достоинствах которой пишет: «*Если бы надо было придумать выражение, которое меняет знак с ростом* $k$ *и уменьшается с ростом* $L$, *то проще, чем* $\frac{Const-k}{L}$ *не получилось бы, наверное*». Согласитесь, мы видим пример незаурядной математической интуиции.

Интересно и заключение: «*Нечестный» второй эксперимент в данных условиях может измерять геометрическое распределение даже с большим успехом, чем «честный» первый*».

Мы не хотим агитировать за нечестность. Александра, видимо, тоже. Так или иначе, Саша не повторила резон второй учительницы, хотя тоже, возможно, согласна с тем, что при такой организации опыта дисциплина крепче.

И.Высоцкий

## XIV олимпиада МЦНМО по теории вероятностей и статистике

*решения задач основного тура 21 декабря 2020 г.— 24 января 2021 г.*

**4. Города Анчурии (от 6 класса, 1 балл).** В Анчурии одна река Рио-Бланко, которая берёт начало где-то в горах и впадает в океан, и всего пять городов: Сан-Матео, Аласан, Коралио, Альфоран и Солитас.

На рисунке показана карта Анчурии, но названий городов нет, города отмечены цифрами. В таблице даны некоторые общие сведения обо всех пяти городах. Определите, где какой город на карте.

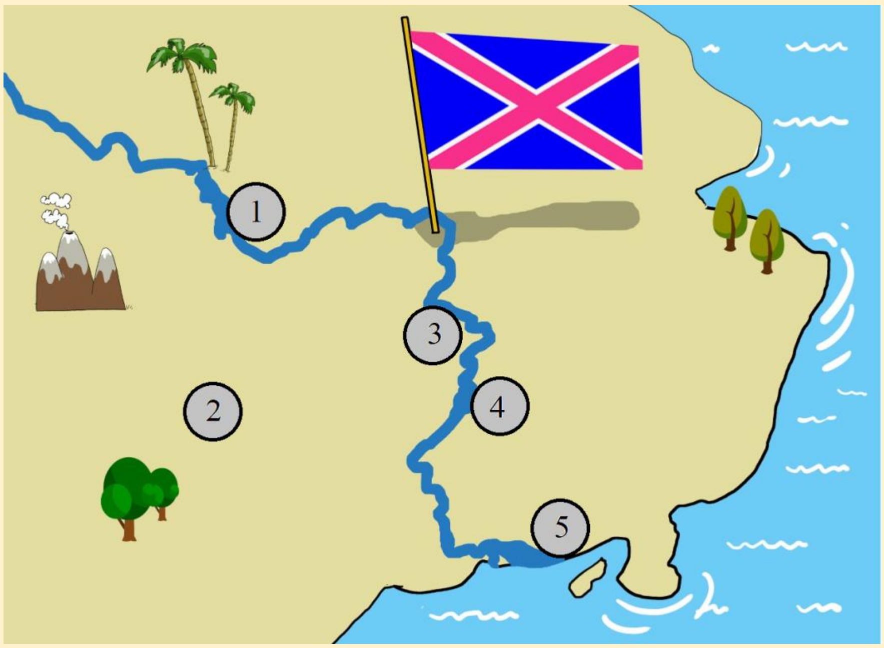



Рис. 1. Точная карта Анчурии (картограф Николай Крутиков)

Табл. Города Анчурии

| Город | Площадь, (кв.мили) | Население, (тыс.чел.) | Основная статья дохода | Высота центра города над уровнем моря (в футах) | Источник пресной воды |
|---|---|---|---|---|---|
| Сан-Матео | 18,3 | 120,2 | Сувенирная промышленность | 117 | р. Рио-Бланко |
| Коралио | 8,4 | 30,3 | Экспорт обуви | 5 | р. Рио-Бланко |
| Аласан | 12,0 | 45,9 | Бананововодство | 349 | Колодцы и скважины |
| Альфоран | 9,4 | 19,6 | Доходы от проведения турниров по шашкам | 593 | р. Рио-Бланко |
| Солитас | 4,1 | 8,4 | Нет доходов | 232 | р. Рио-Бланко |

**Решение.** Аласан – единственный из городов, который не расположен на берегу реки Рио-Бланко, а берёт воду в скважинах. Значит, Аласан имеет номер 2.

Чем ниже город по течению реки, тем меньше высота над уровнем моря. Из всей доступной статистики требуется только величина «Высота над уровнем моря».

**Ответ**: 1 – Альфоран, 2 – Аласан, 3 – Солитас, 4 – Сан-Матео, 5 – Коралио.

**5. Четыре подруги (от 6 класса, 1 балл).** Маша, Нина, Лена и Оля – подруги. Все они разного роста, но разница совсем невелика – на глаз не определить. Однажды они решили узнать, кто выше, а кто ниже. Оказалось, что Нина ниже Маши, а Лена выше Оли. Какова при этом условии вероятность того, что Нина выше Лены?

**Решение**. Возможны следующие равновозможные распределения по убыванию роста:

МНЛО, МЛНО, МЛОН, ЛОМН, ЛМОН и ЛМНО.

Из этих шести элементарных исходов только один – МНЛО – благоприятствует событию «Нина выше Лены».

**Ответ**: 1/6.

**6. Экспериментальный учебник (от 6 класса, 2 балла).** При испытании нового учебника по математике в эксперименте приняли участие примерно одинаковые по численности параллели седьмых классов из двух школ. В каждой школе часть семиклассников училась по экспериментальному учебнику, а часть – по обычному старому учебнику. В конце учебного года был проведен итоговый тест, который показал, насколько хорошо семиклассники освоили учебный материал.

Табл. 1. Результаты теста в 1-й школе

| | Учились по экспериментальному учебнику | Учились по обычному учебнику |
|---|---|---|
| Выполнили тест хорошо | 30% | 15% |
| Выполнили тест плохо | 35% | 20% |
| Доля тех, кто выполнил хорошо | 0,46 | 0,43 |

Табл. 2. Результаты теста во 2-й школе

| | Учились по экспериментальному учебнику | Учились по обычному учебнику |
|---|---|---|
| Выполнили тест хорошо | 20% | 45% |
| Выполнили тест плохо | 10% | 25% |
| Доля тех, кто выполнил тест хорошо | 0,67 | 0,64 |

В обеих школах доля тех, кто выполнил тест хорошо, оказалась выше в группе тех, кто учился по экспериментальному учебнику. Поэтому был сделан вывод, что новый учебник обеспечивает более высокое качество образования.

Только Рассеянный Учёный выступил против нового учебника и ко всеобщему удивлению заявил, что те, кто учился по новому учебнику, сдали тест в среднем хуже, чем те, кто учился по старому.

Кто прав?

**Решение.** Прав Рассеянный Учёный. Предположим для простоты, что в каждой школе одинаковое количество семиклассников, а именно $100x$ человек (множитель 100 взят, чтобы было проще находить проценты). Объединим обе таблицы, но только напишем данные не в процентах, а в абсолютном числе школьников.

Табл. 3. Объединённые результаты теста

| | Учились по экспериментальному учебнику | Учились по обычному учебнику |
|---|---|---|
| Выполнили тест хорошо | $50x$ | $60x$ |
| Выполнили тест плохо | $45x$ | $45x$ |
| Доля тех, кто выполнил тест хорошо | $\frac{10}{19} \approx 0{,}53$ | $\frac{4}{7} \approx 0{,}57$ |

Получается, что в объединённой группе, полученной слиянием семиклассников обеих школ, доля тех, кто выполнил тест хорошо, оказывается ниже среди тех, кто учился по экспериментальному учебнику.

**Комментарий**. Результат может показаться удивительным. Причина в том, что во второй школе школьники успевают намного лучше, чем в первой. Поэтому ни первая, ни вторая школа не образуют репрезентативные выборки из совокупности обеих школ. Получается парадоксальная ситуация: по обеим выборкам видно одно, а в совокупности – другое. Этот парадокс называют *парадоксом Симпсона*.

**7. Анчурийские шашки[1] (от 7 класса, 1 балл).** Турнир по анчурийским шашкам проводится в несколько туров. Если в туре участвует чётное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если число игроков нечётно, то с помощью жребия выбираются случайные игровые пары, а один игрок остается без пары и не участвует в туре. Ничьей случиться не может, проигравший в каждой паре выбывает из турнира, а победители и игрок без пары, если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира.

[1] Автор задачи Б.Р.Френкин

На турнир по анчурийским шашкам приехало 26 участников, причем все они играют одинаково хорошо, то есть в партии, которую играют любые двое, шансы соперников одинаковы. Среди игроков Денис и Олег. Найдите вероятность того, что они сыграют между собой.

**Решение**. Пусть в турнире $n$ участников. В результате каждой сыгранной партии выбывает один участник, поэтому всего состоится $n-1$ партия. При этом никакая пара не может сыграть две партии, поскольку проигравший выбывает. Следовательно, игровых пар на протяжении всего турнира тоже $n-1$. Всего же из $n$ участников можно составить $C_n^2$ пар игроков, но только $n-1$ из этих возможных пар окажутся игровыми, то есть сыграют между собой. В силу случайности выбора и равной силы противников в каждой партии, вероятность того, что двое наперёд заданных участников попадут в одну из игровых пар, равна $\frac{n-1}{C_n^2}=\frac{2(n-1)}{n(n-1)}=\frac{2}{n}$. Подставляя $n=26$, получаем, что Денис и Олег окажутся в одной из игровых пар с вероятностью $\frac{1}{13}$.

**Ответ**: $\frac{1}{13}$.

**8. Путь короля (от 7 класса, 2 балла)**. Шахматный король находится на поле a1 шахматной доски и хочет пройти на поле h8, двигаясь вправо, вверх или вправо-вверх. Сколькими способами он может это сделать?

**Решение**. Вместо буквенных обозначений вертикалей используем числовые. Тогда вместо a1 можно записать (1,1). Обозначим $S_{m,n}$ число способов пройти из поля (1,1) на поле ($m$, $n$). Нас интересует $S_{8,8}$.

Очевидно, $S_{1,n}=1$ и $S_{m,1}=1$ для всех $m$ и $n$. В частности, можно считать. что $S_{1,1}=1$, поскольку на поле (1,1) король попадает единственным способом: стоит на месте и ничего не делает.

Если $m>1$ и $n>1$, то на поле $(m, n)$ можно попасть только из одного из трех полей $(m-1,n),(m,n-1)$ и $(m-1,n-1)$. Получается рекуррентное соотношение $S_{m,n}=S_{m-1,n}+S_{m,n-1}+S_{m-1,n-1}$.

Вычисления легко провести в Excel (рис. 2).

ИНДЕКС =C5+C6+D6

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 1 | 15 | 113 | 575 | 2241 | 7183 | 19825 | 48639 |
| 2 | 7 | 1 | 13 | 85 | 377 | 1289 | 3653 | 8989 | 19825 |
| 3 | 6 | 1 | 11 | 61 | 231 | 681 | 1683 | 3653 | 7183 |
| 4 | 5 | 1 | 9 | 41 | 129 | 321 | 681 | 1289 | 2241 |
| 5 | 4 | 1 | 7 | =C5+C6+D6 | | 129 | 231 | 377 | 575 |
| 6 | 3 | 1 | 5 | 13 | 25 | 41 | 61 | 85 | 113 |
| 7 | 2 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 9 | | a | b | c | d | e | f | g | h |

Рис. 2. Решение задачи 8 в Excel

**Ответ**: 48639.

**9. Буратино-статистик (от 7 класса, 2 балла).** Буратино каждый месяц играет в лотерею «6 из 45», устроенную Карабасом-Барабасом. В лотерее 45 пронумерованных шаров, и в каждом тираже выпадает 6 случайных выигрышных шаров.

Буратино заметил, что в каждом следующем тираже не бывает шаров, выпавших в предыдущем тираже: во втором тираже не было шаров из первого, в третьем – из второго и т. д.

Буратино не верит в события, вероятность которых меньше чем 0,01. Если происходит такое событие, то Буратино начинает подозревать неладное. После какого тиража Буратино начнет подозревать, что Карабас-Барабас жульничает?

**Решение**. Вероятность того, что во втором тираже не повторятся числа из первого, равна $a = \dfrac{39\cdot 38\cdot 37\cdot \ldots \cdot 34}{45\cdot 44\cdot 43\cdot \ldots 40} = 0{,}40056...$, что чуть больше, чем 0,4. Вероятность того, что повторений предыдущего тиража не будет во втором и в третьем тиражах, равна квадрату этого числа, то есть $a^2$. Вероятность отсутствия повторений в тиражах со второго по четвёртый равна $a^3$, и так далее. Пятая степень числа $a$ больше, чем 0,01: $a^5 > 0,4^5 = 10^{-5} \cdot 2^{10} = 0,01024$, а шестая уже меньше: $a^6 = 0,0041...$ . Значит, Буратино может обвинить Карабаса-Барабаса после того, как это явление повторится 6 раз, то есть после седьмого тиража.

**Ответ**: после седьмого.

**10. Произведение цифр (от 7 класса, 3 балла).** Незнайка решал следующую задачу. «Дан набор из 20 случайных цифр. Найдите вероятность того, что произведение этих цифр оканчивается на 0». Незнайка рассуждал так.

*Если набор содержит цифру* 0*, то произведение цифр точно оканчивается на 0. Вероятность этого равна* $1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$. *Если номер не содержит* 0 *(вероятность этого* $\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$ *), то, чтобы произведение было нулевым, он должен содержать хотя бы одну чётную цифру и цифру* 5.

*Среди девяти ненулевых цифр пять нечётные. Вероятность того, что все цифры нечётные, равна* $\left(\frac{5}{9}\right)^{20}$*, значит, вероятность того, что есть хотя бы одна чётная цифра, равна* $1-\left(\frac{5}{9}\right)^{20}$.

*Когда мы удостоверились, что в номере нет нуля, но есть чётная цифра, надо убедиться в том, что есть цифра 5. Условная вероятность того, что пятёрки нет, при условии, что есть чётная цифра, равна* $\left(\frac{8}{9}\right)^{19}$*, ведь одна позиция занята чётной цифрой, так что пятёрка на этой позиции точно стоять не будет, остаётся 19 позиций, и пятёрка отсутствует, если на каждой из них одна из восьми цифр (не* 5 *и не* 0*). Поэтому условная вероятность того, что пятёрка есть, равна* $1-\left(\frac{8}{9}\right)^{19}$. *Следовательно, искомая вероятность равна*

$$\left(1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right)+\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\cdot\left(1-\left(\frac{5}{9}\right)^{20}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{8}{9}\right)^{19}\right)\approx 0,987 .$$

Знайка провёл эксперимент: он сгенерировал на компьютере 1000 случайных последовательностей по 20 цифр в каждой и нашёл долю тех последовательностей, где произведение цифр оканчивалось нулём. Эксперимент дал результат близкий к ответу Незнайки. Расхождение оказалось совсем небольшим и, возможно, случайным, если Незнайка правильно решил задачу. Или не случайным?

Повторите эксперимент Знайки несколько раз. Удаётся ли с помощью эксперимента подтвердить или опровергнуть правоту Незнайки? Если Незнайка все же ошибся, то как правильно решить задачу?

**Решение**. В рассуждении Незнайки есть ошибка: если в наборе есть чётная цифра, то это не значит, что она там одна. Если чётных цифр несколько, то ни на одной из позиций, занятых этими цифрами, не может стоять пятёрка, поэтому условная вероятность того, что пятёрка есть, зависит от того, сколько в наборе чётных цифр.

Эксперимент Знайки, видимо, верен. Но он даёт только приближённое значение вероятности. Правильным представляется следующее рассуждение.

Введём события $A_i$ «$i$-я цифра набора делится на 2» и $B_j$ «$j$-я цифра делится на 5», $\mathrm{P}(A_i)=0{,}5$, $\mathrm{P}(B_j)=0{,}2$. События $A_i$ попарно независимы, события $B_j$ попарно независимы, события $A_i$ и $B_j$ при $i \neq j$ также независимы. Кроме того, события $A_i$ и $B_i$ независимы, потому что вероятность их одновременного наступления равна 0,1.

Отсюда следует, что события $A_1,\ldots,A_{20},B_1,\ldots,B_{20}$ независимы в совокупности. Действительно, если у нас есть какой-то набор некоторых из этих событий, то события с разными индексами независимы, поскольку они относятся к разным цифрам, а события $A_i$ и $B_i$ с одним индексом, как мы заметили, тоже независимы, поэтому вероятность пересечения этих событий равна произведению их вероятностей.

Интересующее нас событие «произведение оканчивается цифрой 0» состоит в том, что наступило хотя бы одно из событий $A_i$ и хотя бы одно из событий $B_i$. Вероятность того, что не наступило ни одно из $A_i$, равна $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{20}=\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$, а вероятность противоположного события «наступило хотя бы одно из событий $A_i$» равна $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$. Аналогично, вероятность того, что не наступило ни одно из $B_i$, равна $\left(1-\frac{1}{5}\right)^{20}=\left(\frac{4}{5}\right)^{20}$, а вероятность противоположного события «наступило хотя бы одно из событий $B_i$» равна $1-\left(\frac{4}{5}\right)^{20}$. Поскольку $A_i$ и $B_i$ независимы, искомая вероятность равна

$$\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right)\cdot\left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{20}\right)=\left(1-0{,}5^{20}\right)\cdot\left(1-0{,}8^{20}\right)\approx 0{,}98847.$$

**Ответ**: прибл. 0,988.

**11. Туз бубен (От 8 класса, 2 балла).** Тридцать шесть игроков играют в игру: из карточной колоды, в которой 36 карт, они по очереди выбирают по случайной карте. Если игроку попался туз бубен, то игрок выиграл; если же попалась другая карта, игрок возвращает её в колоду, и карту тянет следующий игрок. Так они тянут карты по кругу: сначала первый, затем второй и т.д. Если на первом круге никому не попался туз бубен, игроки в том же порядке тянут карты по второму кругу. Это продолжается до тех пор, пока кто-то из них не вытянет туза бубен.

Предположим, что перед началом игры игроки сделали ставки, и выигравший забирает их все. Как должны относиться ставки игроков, чтобы игра стала безобидной, то есть математические ожидания выигрыша у всех игроков оказались равны между собой (то есть равны нулю с учётом внесенной суммы)?

**Решение**. Обозначим вероятность выигрыша первого игрока $p_1$. Предположим, что первый игрок в первый раз не вытянул туза бубен. Вероятность этого 35/36. В этот момент второй игрок становится первым, и вероятность того, что он выиграет, становится равна $p_1$. Возвращаясь к началу игры, мы видим, что для выигрыша второго игрока нужно, чтобы сначала первый промахнулся. Значит, в начале игры вероятность выигрыша второго игрока равна $\frac{35}{36}p_1$, а это меньше, чем $p_1$.

Аналогично, вероятность выигрыша у каждого следующего игрока во столько же раз меньше, чем у предыдущего: $p_{k+1}=\frac{35}{36}p_k$. Игра нечестная.

Пусть $L_k$ — ставка игрока номер $k$, а $L$ — суммарная ставка, равная сумме ставок всех игроков. Чтобы игра стала безобидной, нужно, чтобы математическое ожидание выигрыша каждого игрока равнялось нулю:

$$(L-L_k)p_k+(1-p_k)(-L_k)=0, \text{ откуда } L_k=Lp_k.$$

Получается, что ставки игроков должны быть пропорциональны вероятностям их выигрышей, то есть ставка каждого следующего игрока должна быть в $\frac{36}{35}$ раза меньше ставки предыдущего.

**Ответ**: ставка каждого следующего игрока должна относиться как $35:36$ к ставке предыдущего.

**12. Зимний лагерь.** В зимнем лагере в комнате живут Ваня и Гриша. Каждый вечер они бросают жребий, кому гасить свет перед сном: дело в том, что выключатель около двери, и проигравшему приходится идти к кровати в полной темноте, натыкаясь на стулья.

Обычно Ваня и Гриша бросают жребий без затей, но в этот раз Гриша придумал особенный жребий:

– Давай бросать монету. Если при каком-то чётном броске выпадет орёл, то дальше монету не бросаем: я выиграл. Если же при каком-то нечётном броске выпадет решка, то выиграл ты.

а) **(от 8 класса, 2 балла).** Какова вероятность выигрыша Гриши?

б) **(от 8 класса, 2 балла).** Найдите математическое ожидание числа бросков монеты до окончания жребия.

**Решение**. а) Будем считать, что орёл при очередном броске даёт единицу, а решка – ноль в дробной части двоичной дроби. Получается некоторое число $x$, представленное двоичной дробью. Например, если последовательность бросаний начинается ОРО, то получается двоичная дробь 0,101.

Очевидно, $0 \le x \le 1$, при этом вероятность события $0 \le x \le a$ равна $a$ при любом неотрицательном $a \le 1$ (попробуйте это строго обосновать)

Нетрудно видеть, что Гриша выиграет, только если последовательность бросков даст число $x$, которое больше, чем

$$0{,}10101010101\ldots = 0 + \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} + \frac{0}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{2}{3}.$$

Вероятность этого равна $\frac{1}{3}$. Если полученная дробь меньше, чем 2/3, то выигрывает Ваня. Событие «получится в точности 2/3» имеет нулевую вероятность.

**Другое решение** можно получить, если рассмотреть два первых броска. Гриша выигрывает только в случае ОО, а в случае ОР не выигрывает никто, и игра начинается снова. Поэтому вероятность выигрыша Гриши $p$ можно найти из уравнения

$$p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p, \text{ откуда } p = \frac{1}{3}.$$

б) Успехом назовём бросок, при котором жребий решился, то есть выпадение орла при чётном броске или решки при нечётном. Вероятность успеха при каждом отдельном броске равна 0,5. В силу независимости бросков математическое ожидание числа бросков равно 2.

**Ответ**: а) 1/3; б) 2.

**13. Короткий алгоритм (от 8 класса, 2 балла)**. Есть 4 монеты разного веса. За одно действие можно взвесить две монеты на чашечных весах без гирь и узнать, какая из них тяжелее. Требуется упорядочить монеты по весу. Покажите, что существует способ упорядочить монеты, при котором математическое ожидание числа взвешиваний меньше, чем 4,8.

**Решение**. Построим алгоритм, дающий среднее число взвешиваний $4\frac{2}{3}$. Обозначим монеты *A*, *B*, *C* и *D*. Меньше, чем тремя взвешиваниями не обойтись. Первыми двумя взвешиваниями сравним *A* с *B* и *C* с *D*. Будем предполагать для определённости, что $A<B$ и $C<D$, то есть что $A$ легче, чем $B$ и что $C$ легче, чем $D$. Если это не так, то переименуем монеты, чтобы это было так. Дальнейший процесс изобразим с помощью дерева (рис.3).

Таким образом, к начальным двум взвешиваниям нужно прибавить:

- с вероятностью $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ ещё два;
- с вероятностью $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ ещё три.

Искомое математическое ожидание равно $2+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$.

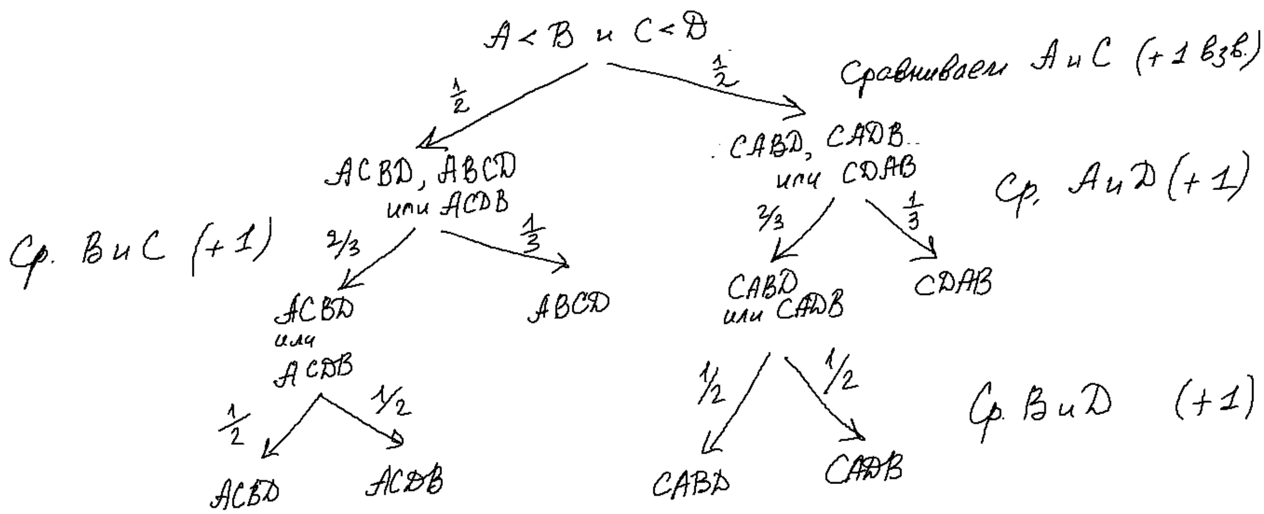



Рис. 3. Бинарное дерево алгоритма

**14. Ошибка стажёра (от 8 класса, 3 балла).** На хлебозаводе дозирующий автомат отмеряет порции теста массой 400 г. Принято правило: если стандартное отклонение десяти случайных измерений превосходит 5% номинальной массы порции, то автомат требует ремонта.

Для проверки автомата юный стажёр Иванов взвесил 10 случайных порций, отмеренных автоматом, с точностью до грамма и записал в таблицу, на сколько граммов порции отличаются в ту или иную сторону от номинальной массы 400 г.

| Номер порции | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Отличие от 400 г | 12 | 32 | 18 | 19 | 28 | 15 | 7 | 22 | 12 | 21 |

Молодой инженер Петров рассердился и сказал, что вся работа насмарку, поскольку знаки отклонений неизвестны, и он не может вычислить ни стандартное отклонение, ни даже среднее арифметическое.

Опытный мастер Сидоров лишь покачал головой и заявил, что всё не так плохо. Конечно, найти стандартное отклонение невозможно, но можно математически доказать, что автомат ремонта не требует. Как мог рассуждать мастер Сидоров?

**Решение**. Мастер мог рассуждать так.

*Среднее квадратичное отклонение от 400 г равно*

$$\sqrt{\frac{12^2+32^2+18^2+\ldots+21^2}{10}}=\sqrt{398}\text{ г.}$$

*Стандартное отклонение, то есть среднее квадратичное отклонение чисел массива от среднего арифметического, не больше, чем среднее квадратичное отклонение от любого другого числа, поэтому стандартное отклонение масс теста в контрольной партии не больше, чем* $\sqrt{398}\text{ г}<20\text{ г}$, *то есть меньше, чем 5% от номинальной массы 400 г.*

В рассуждении использован известный факт: стандартное отклонение произвольного числового массива $X=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ не превосходит среднего квадратичного отклонения этого массива от любого числа. Докажем это. Достаточно показать, что дисперсия не больше, чем средний квадрат отклонения от любого числа.

Запишем средний квадрат отклонения от произвольного числа $y$:

$$\frac{\left(x_1-y\right)^2+\left(x_2-y\right)^2+\left(x_3-y\right)^2+\ldots+\left(x_n-y\right)^2}{n}=$$

$$=y^2-\frac{2}{n}\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)y+\frac{1}{n}\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right).$$

В правой части получился квадратный трёхчлен от переменной $y$. Он принимает наименьшее значение в точке

$$y_0=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{n}\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)\right)=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\bar{x}.$$

Таким образом, при $y=\bar{x}$ средний квадрат отклонений от $y$ достигает своего наименьшего значения, равного дисперсии массива.

**15. Красное и чёрное (от 8 класса, 3 балла).** Банкомёт[2] по одной сдаёт игроку карты из хорошо перетасованной обычной карточной колоды. В любой момент, пока у банкомёта еще остались карты, игрок может сказать «Стоп». После этого банкомёт открывает ещё одну карту. Если она красной масти, то игрок выигрывает, если чёрной, то проигрывает.

Существует ли у игрока стратегия, при которой вероятность выигрыша больше чем 0,5?

[2] В некоторых карточных играх тот, кто сдает игрокам карты, называется банкомётом.

**Решение**. Предположим, что такая стратегия существует, то есть, руководствуясь последовательностью уже открытых карт, игрок может определить оптимальный момент, когда нужно сказать «Стоп».

Пусть в этот момент в колоде остаются закрытыми $r$ красных и $b$ чёрных карт. Тогда вероятность успеха, то есть события «следующая карта красная», равна $\frac{r}{r+b}$.

Изменим правило и скажем «Стоп» после следующей карты (назовем это правило «плюс одна»). Тогда закрытыми останутся $r+b-1$ карт, среди которых $r-1$ красная и $b$ чёрных с вероятностью $\frac{r}{r+b}$ или $r$ красных и $b-1$ чёрная с вероятностью $\frac{b}{r+b}$. Таким образом, при правиле «плюс одна» игрок выиграет с вероятностью

$$\frac{r}{r+b}\cdot\frac{r-1}{r+b-1}+\frac{b}{r+b}\cdot\frac{r}{r+b-1}=\frac{r\left(r+b-1\right)}{\left(r+b\right)\left(r+b-1\right)}=\frac{r}{r+b}.$$

Иными словами, переход от исходной стратегии к стратегии «плюс одна» не меняет вероятности выигрыша. Рассуждая так же, видим, что вероятность останется той же, если ещё раз изменить стратегию и пользоваться стратегией «плюс две». И так далее. Получается, что если игрок знает выигрышное правило, после какой карты сказать «Стоп», то он может сказать «Стоп» не только после этой карты, но и после любой следующей за ней, при этом вероятность выигрыша останется такой же. Значит, можно принять правило «Стоп» после предпоследней карты» независимо от того, какова была предыдущая последовательность открытых карт, и это не изменит вероятности выигрыша. Получается, что какова бы ни была выбранная стратегия, всё зависит от последней карты в колоде. Но она с равными шансами может оказаться чёрной или красной. Значит, до начала игры никакая заранее выбранная стратегия не гарантирует перевес шансов игрока.

**Ответ**: нет.

**Замечание**. Сказанное не значит, что при некотором развитии событий вероятность не может быть больше, чем 0,5. Например, если в колоде 36 карт, и в какой-то момент открылись все 18 чёрных, то все оставшиеся красные, и игрок выиграет с вероятностью 1. Однако следование стратегии «ожидание всех чёрных» с тем же успехом может привести к гарантированному проигрышу, а именно тогда, когда вопреки ожиданиям сначала открылись все красные.

**16. Почтовые ящики.** В новом только что заселённом многоквартирном доме рабочие повесили блок из 80 почтовых ящиков. Внутрь каждого ящика они положили кольцо с ключом и биркой с номером квартиры, но не позаботились о том, чтобы в каждом ящике лежал ключ от этого ящика. Они просто покидали ключи в ящики в случайном порядке. Ящики, разумеется, заперты.

Рассеянный Учёный, недавно поселившийся в квартире 37, обрадовался, увидев ящики, но консьержка сказала, что достать ключи она не может. Нужно идти в управляющую компанию, которая осуществляет приём граждан каждый третий понедельник месяца с 12.00 до 12.30.

Найдя в мусорной урне палочку (кто-то заказывал суши), Учёный с четвёртой попытки сумел извлечь ключ из ящика № 37. Он рассуждал следующим образом: если это ключ от моего ящика, то всё хорошо. Если нет, то я открою ящик, от которого этот ключ, ключ оставлю в замке, выну из ящика следующий ключ, открою им следующий ящик и так далее, пока не достану свой ключ.

а) (**от 8 класса, 3 балла).** Докажите, что описанный алгоритм результативен, то есть что Рассеянный Учёный найдёт свой ключ.

б) **(от 9 класса, 6 баллов).** Найдите математическое ожидание числа жильцов, которым придётся ковырять в ящиках палочкой, если все они будут следовать алгоритму Рассеянного Учёного.

**Решение**. Почтовые ящики и ключи будем нумеровать так же, как квартиры. Нужно показать, что рано или поздно Учёный достанет ключ 37 от ящика 37.

Последовательность номеров извлечённых ключей не может быть бесконечной, поскольку квартир всего 80. Последовательность должна оканчиваться номером 37. Если это не так, и последний номер не 37, то будет открыт следующий ящик, и Учёный достанет из него следующий ключ. Но тогда предыдущий номер не будет последним. Противоречие. Значит, последний ключ 37, а это и значит, что алгоритм результативен.

Чтобы решить задачу б), представим себе ориентированный граф, вершины которого изображают почтовые ящики. Если в ящике $a$ лежит ключ от ящика $b$, то в графе есть ребро $(a;b)$. Других рёбер в графе нет. В каждую вершину входит ровно одно ребро, и из каждой вершины выходит ровно одно ребро (может быть, то же самое, если в ящике лежит ключ от этого же ящика). Получается, что степень каждой вершины равна 2. Следовательно, этот граф является объединением непересекающихся циклов. Каждый жилец посредством палочки «попадает» в какую-то вершину этого цикла и завершает его, достав ключ от своего почтового ящика. Требуется найти среднее количество циклов $X$ .

Пусть $I_{1,2,\ldots,k}$ – индикатор события «вершины $1,2,\ldots,k$ образуют цикл, причём именно с таким порядком вершин», то есть $I_{1,2,\ldots,k}=1$, если это так, и $I_{1,2,\ldots,k}=0$, если это не так.

Если общее количество вершин-ящиков в графе равно $n$, то математическое ожидание $\mathrm{E}\,I_{1,2,\ldots,k}$ равно вероятности этого события и равно

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n-(k-1)}=\frac{(n-k)!}{n!}.$$

Кратко поясним, почему это так. Первый множитель – это вероятность того, что в ящике 1 лежит ключ 2. Второй множитель равен вероятности того, что при этом в ящике 2 окажется ключ 3, и так далее.

Точно такова же вероятность, что цикл образует любой упорядоченный набор из $k$ вершин. Общее количество $X_k$ упорядоченных циклов длины $k$ равно сумме индикаторов всех возможных упорядоченных циклов с ровно $k$ вершинами, а таких возможных циклов

$$C_n^k\cdot(k-1)!=\frac{n!}{k(n-k)!}.$$

Поэтому $\mathrm{E}\,X_k=\dfrac{n!}{k(n-k)!}\cdot\dfrac{(n-k)!}{n!}=\dfrac{1}{k}$. Иными словами, получается в среднем 1 цикл длины 1, полцикла длины 2, треть цикла длины 3 и так далее – среднее число циклов длины $n$ равно $\dfrac{1}{n}$, а математическое ожидание числа всех циклов равно

$$\mathrm{E}\,X=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Полученная сумма называется $n$-ым гармоническим числом и обозначается $H_n$. При $n=80$ с помощью компьютера или калькулятора находим, что $H_n\approx 4{,}965$. Известно приближённое равенство

$$H_n\approx\ln n+\gamma+\frac{1}{2n},$$

где $\gamma$ – константа Эйлера-Маскерони, равная пределу разности между гармоническим числом и натуральным логарифмом: $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}(H_n-\ln n)$. В практических расчетах можно полагать $\gamma$ равным 0,58. Если воспользоваться этой приближённой формулой, то получим, что среднее число жильцов, ковыряющих палочкой, приблизительно равно $\ln 80+0{,}58+\dfrac{1}{160}\approx 4{,}968$.

**17. Счастливые суммы (от 8 класса, 4 балла).** В лотерее «Счастливая сумма» всего $N$ шаров с номерами от 1 до $N$. Во время основного тиража случайным образом выпадают 10 шаров. Во время дополнительного тиража из этого же набора шаров случайно выбирают 8 шаров. Сумма номеров на выпавших шарах в каждом тираже объявляется *счастливой суммой,* и те игроки, кто эту сумму предсказал, получают выигрыш.

Может ли быть, что события $A$ «в основном тираже счастливая сумма равна 63» и $B$ «в дополнительном тираже счастливая сумма равна 44» равновероятны? Если да, то при каком условии?

**Решение**. В основном тираже всего возможно $C_N^{10}$ комбинаций, а в дополнительном – $C_N^8$ комбинаций. Обозначим $S_{63,10}$ количество комбинаций в первом тираже, при которых сумма равна 63. Слагаемые – различные натуральные числа от 1 до $N$. Если самое малое число 2 или больше, то сумма всех десяти слагаемых не меньше, чем

$$2+3+\ldots+11=\frac{2+11}{2}\cdot 10=13\cdot 5=65.$$

Значит, самое малое число равно 1. Отбрасывая в каждом слагаемом единицу, то есть вычитая из суммы 10, мы находим, что остальная сумма 53 получена девятью различными натуральными слагаемыми, каждое из которых не превосходит числа $N$. Иными словами, способов получить сумму 63 десятью слагаемыми столько же, сколько способов получить сумму 53 девятью слагаемыми: $S_{63,10}=S_{53,9}$.

Рассуждая аналогично, получаем: $S_{63,10}=S_{53,9}=S_{44,8}$. Теперь можно найти отношение вероятностей:

$$\frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{S_{44,8}\cdot C_N^{10}}{C_N^8\cdot S_{63,10}}=\frac{C_N^{10}}{C_N^8}=\frac{8!(N-8)!}{10!(N-10)!}=\frac{(N-8)(N-9)}{90}.$$

Найдем, при каких $N$ полученная дробь равна единице:

$$\frac{(N-8)(N-9)}{90}=1;\ N^2-17N-18=0,\text{ откуда }\ N=18.$$

**Ответ:** такое возможно, если в лотерее 18 шаров.

**18. Везучий шпион (от 9 класса, 2 балла)**. В абсолютно случайную точку абсолютно квадратного леса $10\times10$ км на парашюте спускается шпион с радиопередатчиком. Приземлившись, он немедленно начинает радиопередачу, сообщая противнику важные сведения.

Во всех четырёх углах леса расположены радиопеленгаторы, каждый из которых обнаруживает работу передатчика на расстоянии не более 10 км. Чтобы контрразведка точно определила координаты работающего передатчика, нужно, чтобы передатчик был обнаружен хотя бы двумя пеленгаторами.

Шпиону повезло: один из радиопеленгаторов сегодня не работает. Какова вероятность того, что контрразведчики не смогут определить координаты места, где приземлился шпион?

**Решение**. Предположим для определённости, что не работает пеленгатор в северо-восточном углу (рис. 4). На рисунке показано, сколько пеленгаторов «видит» каждую из шести образовавшихся областей. Место, где притаился шпион, нельзя точно определить, если он оказался в одной из двух областей, видимых только одному пеленгатору.

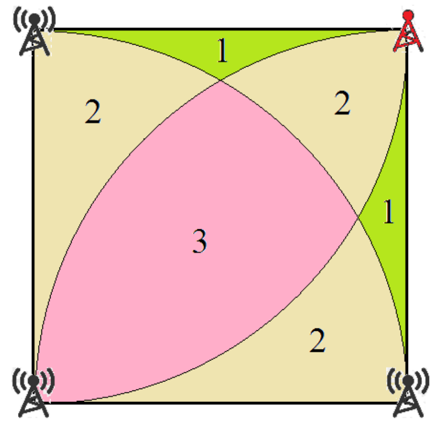



Рис. 4.

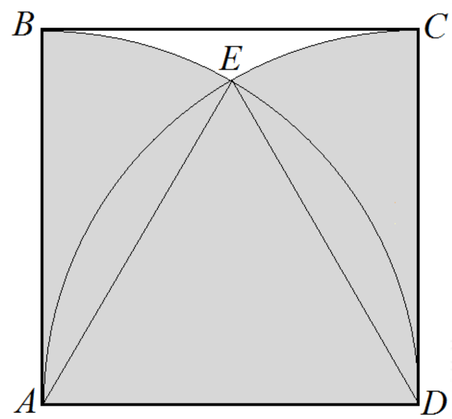



Рис. 5.

Будем считать, что сторона квадрата равна 1. Введём обозначения, как показано на рис. 5, и найдём площадь закрашенной фигуры, состоящей из равностороннего треугольника $AED$ и двух одинаковых секторов $ABE$ и $DEC$.

Площадь треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{4}$, а каждый сектор имеет центральный угол $30°$, поэтому площадь каждого сектора в двенадцать раз меньше площади единичного круга, то есть она равна $\frac{\pi}{12}$. Тогда площадь всей закрашенной фигуры равна $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}$, а площадь криволинейного треугольника $BEC$ равна $1-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{6}$. Площадь всей зоны, где местоположение шпиона нельзя определить, вдвое больше: $2-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}\approx 0{,}087$.

**Ответ**: прибл. 0,087.

**19. Маршрутное такси**. Проезд в маршрутке стоит 75 рублей. Пятнадцать пассажиров заходят поодиночке и между собой деньгами не меняются. С вероятностью 0,5 пассажир даёт водителю купюру 100 рублей и получает 25 рублей сдачи монетами по 5 или 10 рублей, а с вероятностью 0,5 пассажир даёт водителю 50 рублей одной купюрой и 25 рублей монетами.

а) **(от 9 класса, 5 баллов)** Перед рейсом у водителя монет не было вообще. Какова вероятность того, что водитель сможет немедленно дать сдачу каждому, кто расплачивается купюрой 100 рублей?

б) **(от 9 класса, 7 баллов)** Какую сумму монетами должен иметь водитель перед выездом, чтобы с вероятностью не менее 0,95 иметь возможность немедленно дать сдачу всем пассажирам, расплатившимся сторублёвкой?

**Решение**. а) Не играет роли, какими именно монетами пассажир или водитель набирают 25 рублей. Можно считать, что они используют монеты достоинством 25 рублей. Тогда будем считать не рубли, а количество монет у водителя. Кроме того, временно предположим, что водитель может залезать в долги, то есть у него может возникнуть отрицательное количество монет. Тогда вопрос можно переформулировать: какова вероятность того, что количество монет у водителя в любой момент времени неотрицательно?

Получается стандартная схема случайного блуждания: сначала величина равна нулю (в начальный момент у водителя монет нет), а на каждом следующем шаге она с равными вероятностями увеличивается или уменьшается на 1.

Каждое возможное блуждание можно изобразить траекторией, то есть ломаной линией в системе координат. Например, траектория может быть такой, как на рисунке 6. Согласно этой траектории, процесс развивается следующим образом: первый пассажир даёт водителю 50 рублей и одну монету, второй – тоже. Затем третий пассажир требует сдачу со 100 рублей, и так далее. В какой-то момент водитель оказывается должен одну, затем две монеты, но к концу поездки у него все же остаётся одна монета. Будем говорить, что такая траектория имеет вид $(0 \to 1)$, поскольку начинается на высоте 0 и заканчивается в точке с ординатой 1.

Всего различных траекторий $2^{15}$, и все они равновозможны: вероятность каждой равна $\frac{1}{2^{15}}$.

Пусть к концу поездки у водителя $k$ монет. Число $k$ нечётное, так как чётного количества монет после нечётного числа пассажиров быть не может. Траекторий вида $(0 \to k)$ столько же, сколько траекторий вида $(1 \to k+1)$: последние получаются из первых сдвигом на единицу вверх.

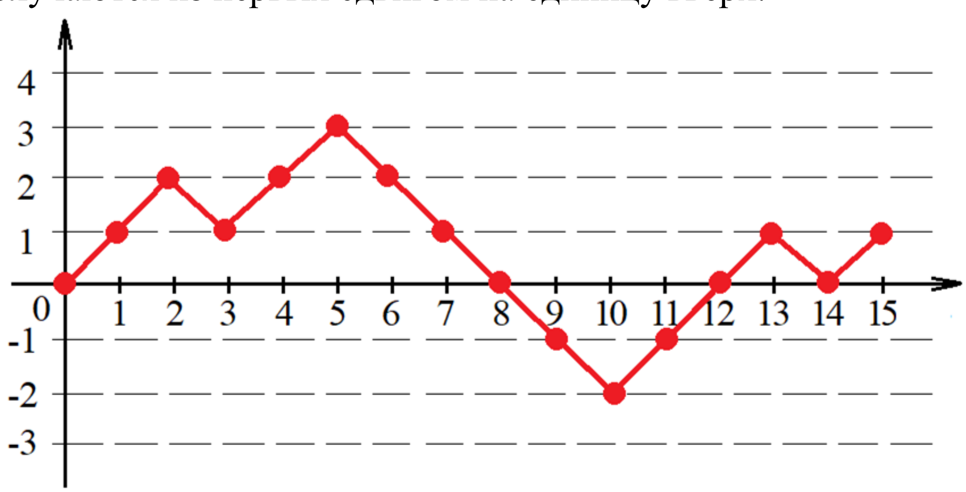



Рис. 6. Пример траектории блуждания.

Событие «водитель сможет немедленно дать сдачу всем пассажирам» состоит в том, что траектория вида $(0 \to k)$ не опускается ниже нуля, или, что то же самое, что траектория вида $(1 \to k+1)$ не достигает нуля, оставаясь всё время в верхней полуплоскости.

Зафиксируем $k \geq 0$ и рассмотрим траектории вида $(1 \to k+1)$, которые достигают нуля. Оказывается, таких траекторий ровно столько, сколько существует всего траекторий из $-1$ в $k+1$. Этот интересный факт становится очевиден, если удачно воспользоваться симметрией. Любая траектория вида $(-1 \to k+1)$ обязательно в какой-то момент проходит через 0. Найдём первый такой момент и отразим в верхнюю полуплоскость часть траектории, расположенную левее этого момента (рис. 7). Получится траектория $(1 \to k+1)$, обязательно принимающая значение 0.


Рис. 7. Любая траектория вида $(1 \to 1)$, проходящая через 0, однозначно соответствует некоторой траектории вида $(-1 \to 1)$. Момент первого возвращения в 0 здесь равен 4.

Обратно: если взять произвольную траекторию вида $(1 \to k+1)$, принимающую в первый раз значение 0 в некоторой точке, и отразить в нижнюю полуплоскость левую часть этой траектории, то получится траектория вида $(-1 \to k+1)$.

Получается, что траекторий вида $(1 \to k+1)$, проходящих через 0, столько же, сколько всего траекторий вида $(-1 \to k+1)$, а их столько, сколько существует способов чередовать 15 шагов вверх и вниз так, чтобы шагов вверх оказалось на $k+2$ больше, чем вниз. Если обозначить число шагов вверх $u$, а число шагов вниз $d$, то получается система уравнений

$$\begin{cases} u+d=15, \\ u-d=k+2, \end{cases} \quad \text{откуда } u=\frac{k+17}{2}.$$

Следовательно, траекторий вида $(-1 \to k+1)$ ровно $C_{15}^{0,5(k+17)}$. Чтобы не нарушать общность и не рассматривать отдельные случаи, можно считать, что при $k>13$ число $C_{15}^{0,5(k+17)}$ равно нулю (верхний индекс больше чем 15).

Общее количество траекторий $(0 \to k)$ найдём тем же способом: число шагов вверх должно на $k$ превосходить число шагов вниз. Получается $C_{15}^{0,5(k+15)}$. Значит, количество траекторий вида $(0 \to k)$, не опускающихся ниже нуля и приходящих в точку с ординатой $k$, равно $C_{15}^{0,5(k+15)} - C_{15}^{0,5(k+17)}$. Осталось просуммировать все эти числа при нечётных $k$ от 1 до 15.

$$\left(C_{15}^{8} - C_{15}^{9}\right) + \left(C_{15}^{9} - C_{15}^{10}\right) + \left(C_{15}^{10} - C_{15}^{11}\right) + \ldots + \left(C_{15}^{15} - C_{15}^{16}\right) = C_{15}^{8} = \frac{15!}{8! \cdot 7!} = 6435.$$

Следовательно, искомая вероятность события «водитель сможет немедленно дать сдачу каждому пассажиру» равна $\frac{6435}{2^{15}} \approx 0{,}196$.

б) Пусть у водителя перед рейсом $k$ монет. Водитель сможет дать сдачу всем тогда и только тогда, когда траектория случайного блуждания, соответствующая развитию событий, неотрицательна и имеет вид $(k \to m)$, где $m$ — количество монет к концу поездки, причём $m = k-15, k-13, \ldots, k+15$.

Таких траекторий столько же, сколько траекторий вида $(k+1 \to m+1)$, целиком лежащих выше нуля.

Снова используем уже знакомую нам симметрию: траекторий вида $(k+1 \to m+1)$, проходящих через ноль, столько же, сколько всего траекторий вида $(-k-1 \to m+1)$, то есть $C_{15}^{\frac{15+(k+m+2)}{2}} = C_{15}^{\frac{17+k+m}{2}}$.

Значит, положительных траекторий вида $(k+1 \to m+1)$ всего $C_{15}^{\frac{15+m-k}{2}} - C_{15}^{\frac{17+k+m}{2}}$. Столько же неотрицательных траекторий вида $(k \to m)$.

Просуммируем эти числа при всех $m$ от $k-15$ до $k+15$ с шагом 2. Получаем 16 слагаемых

$$\left(C_{15}^{0} - C_{15}^{k+1}\right) + \left(C_{15}^{1} - C_{15}^{k+2}\right) + \left(C_{15}^{2} - C_{15}^{k+3}\right) + \ldots + \left(C_{15}^{14} - C_{15}^{k+15}\right) + \left(C_{15}^{15} - C_{15}^{k+16}\right),$$

причём в этой сумме числа $C_{15}^{j}$, у которых $j<0$ или $j>15$, нужно считать равными нулю. Упростим полученное выражение:

$$C_{15}^{0}+C_{15}^{1}+\ldots+C_{15}^{15}-\left(C_{15}^{k+1}+\ldots+C_{15}^{14}+C_{15}^{15}\right)=C_{15}^{0}+C_{15}^{1}+\ldots+C_{15}^{k}.$$

Поэтому вероятность события «монет хватит» равна $\dfrac{C_{15}^{0}+C_{15}^{1}+\ldots+C_{15}^{k}}{2^{15}}$. Эта вероятность должна быть не меньше, чем 0,95, откуда

$$C_{15}^{k+1}+C_{15}^{k+2}+\ldots+C_{15}^{15}=C_{15}^{0}+C_{15}^{1}+\ldots+C_{15}^{14-k}\leqslant 0,05\cdot 2^{15}=1638,4.$$

Таким образом, нужно суммировать числа $C_{15}^{j}$ в 15-й строке треугольника Паскаля до тех пор, пока полученные суммы остаются меньше, чем 1638. Наибольшее $j$ следует положить равным $14-k$ и найти $k$. Запишем вычисления в таблице.

| $j$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_{15}^{j}$ | 1 | 15 | 105 | 455 | 1365 | 3003 |
| Сумма | 1 | 16 | 121 | 576 | 1941 | 4944 |

Сумма не превосходит 1638 при $j\leqslant 3$. Следовательно, $k\geqslant 14-3=11$. Значит, водителю нужно запасти не меньше чем 275 рублей мелочью.

**Ответ**: а) прибл. 0,196; б) 275 р.