МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020/2021 УЧ. ГОД МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

9 класс

I вариант

1. Может ли шахматный конь обойти все клетки стандартной доски по одному разу, если он начнёт движение на H8, а закончит на F6?

Ответ: нет. Конь меняет цвет клетки при каждом ходе. Таким образом, его 63-й ход должен закачиваться на клетке, цвет которой отличается от цвета первоначальной клетки. Но приведённые в условии клетки – одного цвета.

2. Сопоставьте коэффициенты в уравнении $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ с их значениями, если известно, что его корнями являются 1, $\frac{-1\pm3}{2}$.

   Коэффициенты: *a, b, c, d*; возможные значения: 0,1, 2,–3.

Ответ: *a* = 1, *b* = 0, *c* = –3, *d* = 2.

Даны три корня: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

Значит, искомый многочлен имеет вид $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - 3x + 2 = 0$.

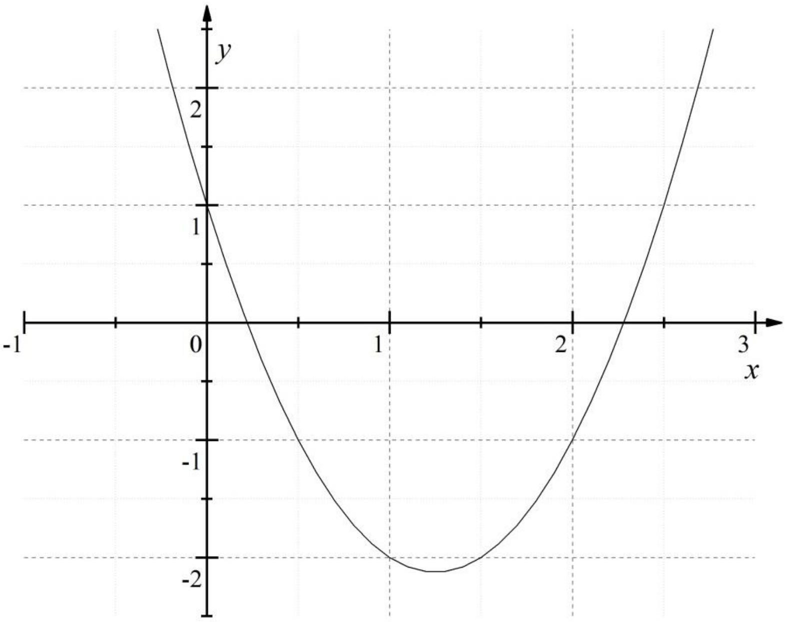
3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 - 4y = 2xy + 5, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Приведя первое уравнение к виду $(x-y)^2 + 4(x-y) - 5 = 0$, мы можем решить его относительно *x*–*y*, получив корни −5 и 1. Тогда получаем две пары значений *x* и *y*: $\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

4. Приведён график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите значения коэффициентов *a*, *b*, *c*.

Москва
2020/2021 уч.год



Ответ: 2, −5, 1. Поскольку графику функции принадлежит точка (0;1), получаем, что $c = 1$. Далее, поскольку графику функции принадлежат точки (0,5; −1) и (2, −1), решаем систему линейных уравнений относительно a и b:

$$\begin{cases} 4a + 2b = -2, \\ a + 2b = -8. \end{cases}$$

5. В сувенирной лавке можно купить магнитики пяти типов. Сколькими способами можно купить

а) три разных магнитика;

б) 4 магнитика;

в) 8 магнитиков.

Ответ: а) $C_5^3 = 10$, б) $C_{4+4}^4 = C_8^4 = 70$, в) $C_{4+8}^4 = C_{12}^4 = 495$. В случаях б) и в) задачу можно свести к следующей – нужно разбить магнитики на классы при помощи четырёх «перегородок» между ними. Все возможные варианты таких разбиений и дадут правильный ответ.

6. Игорь, узнав, что вторая четверть продлится 42 дня, распланировал свой вечерний досуг. Каждый второй день он будет ходить на бокс, каждый третий – программировать, а каждый седьмой – паять. В первый день было проделано всё вышеперечисленное. а) Сколько получится за всю четверть «спортивных» дней, когда Игорь будет заниматься только боксом? б) Сколько вечеров у Игоря окажутся свободными?

Ответ: а) 12, б) 12. Пронумеруем дни числами от 0 до 41. Тогда вопросы сводятся к следующим. а) Сколько чётных чисел от 0 до 41 не делятся ни на 3, ни на 7, б)

Сколько нечётных чисел от 0 до 41 не делятся ни на 3, ни на 7? Ответ на них одинаков, поскольку числа от 0 до 41 мы можем разбить на пары чётных и нечётных чисел с разностью в 21, причём оба числа в паре если и делятся на 3 или 7, то одновременно. Тогда ответим на вопрос п. а): чётных чисел из 42 ровно половина, при этом 7 из них кратны 3, 3 кратны 7, и одно кратно 21. Получаем 21 – 7 – 3 + 1 = 12.

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
2020/2021 УЧ. ГОД
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

9 класс

II вариант

1. Может ли шахматный конь обойти все клетки стандартной доски по одному разу, если он начнёт движение на A2, а закончит на C4?

Ответ: нет, т. к. конь меняет цвет клетки при каждом ходе. Таким образом, его 63-й ход должен закачиваться на клетке отличного от изначального цвета. Приведённые в условии клетки – одного цвета.

2. Сопоставьте коэффициенты в уравнении $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ с их значениями, если известно, что его корнями являются −1, $\frac{1\pm 3}{2}$.

Коэффициенты: *a*, *b*, *c*, *d*; возможные значения: 0, 1, −2, −3.

Ответ: $a = 1$, $b = 0$, $c = -3$, $d = -2$.

Даны три корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Значит, искомый многочлен имеет вид $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - 3x - 2 = 0$.

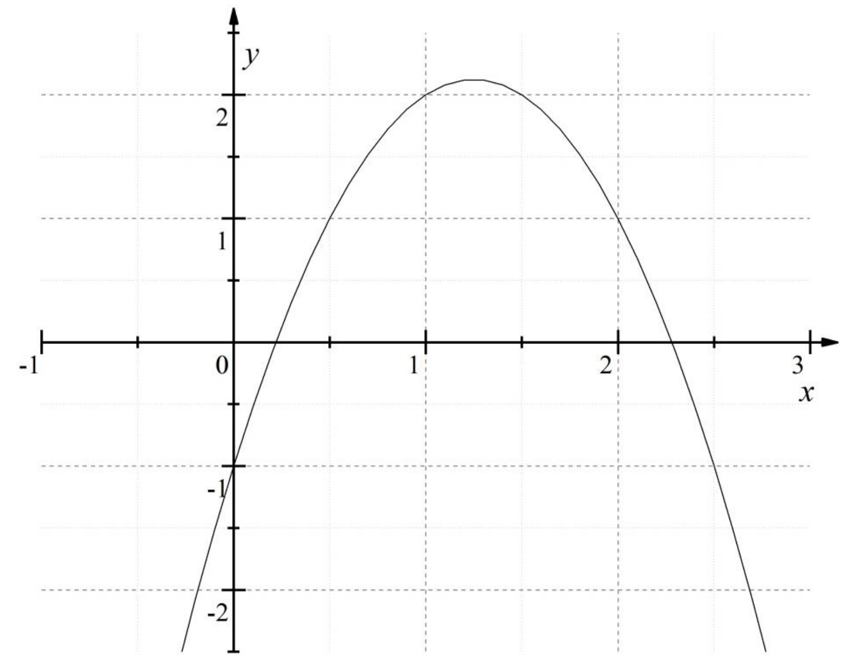
3. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 - 4y = 2xy + 5, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Ответ: Приведя первое уравнение к виду $(x - y)^2 + 4(x - y) - 5 = 0$, мы можем решить его относительно x–y, получив корни −5 и 1.Тогда получаем две пары значений x и y: (−2;3), (1;0).

4. Приведён график функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите значения коэффициентов a, b, c.

Москва
2020/2021 уч.год



Ответ: $-2, 5, -1$. Поскольку графику функции принадлежит точка $(0; -1)$, получаем, что $c = -1$. Далее, поскольку графику функции принадлежат точки (0,5; 1) и (2, 1), решаем систему линейных уравнений относительно a и b:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 2, \\ a + 2b = 8. \end{cases}$$

5. В сувенирной лавке можно купить магнитики пяти типов. Сколькими способами можно купить

а) три разных магнитика;

б) 4 магнитика;

в) 8 магнитиков.

Ответ: а) $C_5^3 = 10$, б) $C_{4+4}^4 = C_8^4 = 70$, в) $C_{4+8}^4 = C_{12}^4 = 495$. В случаях б) и в) задачу можно свести к следующей – нужно разбить магнитики на классы при помощи четырёх «перегородок» между ними. Все возможные варианты таких разбиений и дадут правильный ответ.

6. Игорь, узнав, что вторая четверть продлится 42 дня, распланировал свой вечерний досуг. Каждый второй день он будет ходить на бокс, каждый третий – программировать, а каждый седьмой – паять. В первый день было проделано всё вышеперечисленное. а) Сколько получится за всю четверть «спортивных» дней, когда Игорь будет заниматься только боксом? б) Сколько вечеров у Игоря окажутся свободными?

Ответ: а) 12, б) 12. Пронумеруем дни числами от 0 до 41. Тогда вопросы сводятся к следующим. а) Сколько чётных чисел от 0 до 41 не делятся ни на 3, ни на 7, б)

Сколько нечётных чисел от 0 до 41 не делятся ни на 3, ни на 7? Ответ на них одинаков, поскольку числа от 0 до 41 мы можем разбить на пары чётных и нечётных чисел с разностью в 21, причём оба числа в паре если и делятся на 3 или 7, то одновременно. Тогда ответим на вопрос п. а): чётных чисел из 42 ровно половина, при этом 7 из них кратны 3, 3 кратны 7, и одно кратно 21. Получаем 21 – 7 – 3 + 1 = 12.