

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
2020/2021 УЧ. ГОД  
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР  
8 класс**

**I вариант**

1. В городе 80 тысяч человек поддерживают партию А, а 20 тысяч – партию Б. В области ситуация иная, в ней 70 тысяч сторонников партии Б и 30 тысяч – партии А. Сторонники партий распределены равномерно. Партия Б получила возможность распределить всё население города и области по четырём избирательным округам с равным количеством избирателей для проведения предстоящих выборов. В каком максимальном количестве округов она сможет выиграть?
- а) 0  
б) 1  
в) 2  
г) 3  
д) 4

*Ответ:* г. Наилучшей стратегией будет выделить половину города в один округ, а вторую половину включить в три совместных с областью округа. Так партия Б создаст для себя три выигрышных округа.

2. Сопоставьте коэффициенты в уравнении  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  с их значениями, если известно, что его корнями являются  $1, \frac{-1 \pm 3}{2}$ .

Коэффициенты:  $a, b, c, d$ ; возможные значения: 0, 1, 2, -3.

*Ответ:*  $a = 1, b = 0, c = -3, d = 2$ .

Даны три корня:  $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1$ .

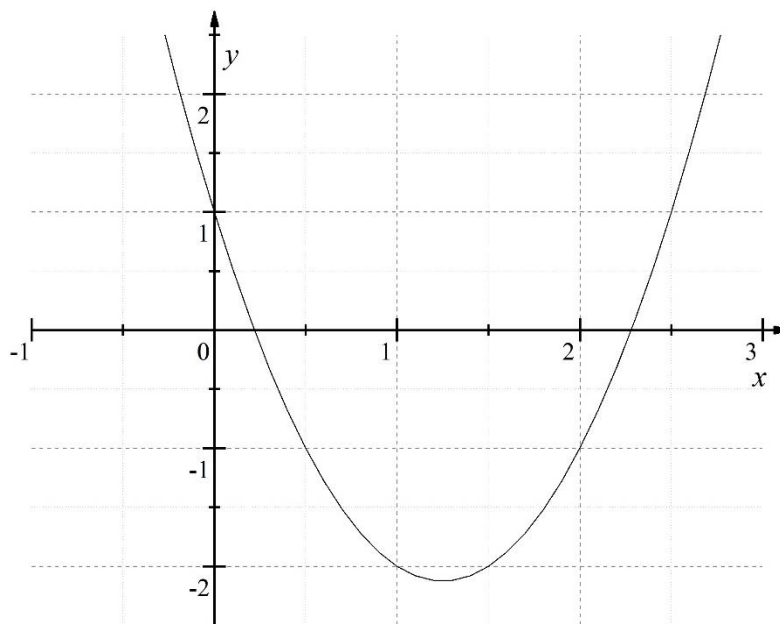
Значит, искомый многочлен имеет вид  $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - 3x + 2 = 0$ .

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 - 4y = 2xy + 5, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

*Ответ:*  $\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ . Приведя первое уравнение к виду  $(x - y)^2 + 4(x - y) - 5 = 0$ , мы можем решить его относительно  $x - y$ , получив корни -5 и 1. Тогда получаем две пары значений  $x$  и  $y$ :  $\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ .

4. Приведён график функции  $y = ax^2 + bx + c$ . Определите значения коэффициентов  $a, b, c$ .



*Ответ:* 2, -5, 1. Поскольку графику функции принадлежит точка  $(0;1)$ , получаем, что  $c = 1$ . Далее, поскольку графику функции принадлежат точки  $(0,5; -1)$  и  $(2, -1)$ , решаем систему линейных уравнений относительно  $a$  и  $b$ :

$$\begin{cases} 4a + 2b = -2, \\ a + 2b = -8. \end{cases}$$

5. Определите, сумма цифр скольких восьмизначных чисел равна а) 2, б) 3, в) 4.

*Ответ:* а) 8, б) 1 (3 и семь нулей) + 14 (2 и 1) + 21 ( $C_7^2$  в случае трёх единиц) = 36, в) 1+14+7 (так как 4 можно представить как сумму двух двоек) + 63 ( $3C_7^2$  в случае 2, 1, 1) + 35 ( $C_7^3$  в случае четырёх единиц) = 120.

6. Петя, листая справочник, узнал, что общая длина железных дорог в Румынии больше, чем в Польше, – 22 733 километра против 19 511. При этом его крайне удивило, что наибольший общий делитель этих чисел совпадает с номером его квартиры. На каком этаже и в каком подъезде живёт Петя, если количество квартир на этаже и число этажей в каждом подъезде его дома – квадраты простых чисел, причём сумма этих простых чисел равна номеру его подъезда? Число этажей больше числа квартир на этаже, нумерация квартир начинается с первого этажа. Также укажите в ответе НОД.

*Ответ:* НОД этих чисел равен 179. Подходящие наборы числа квартир на этаже, этажности и подъезда: 4, 9, 5 и 9, 4, 5. Поскольку число этажей больше числа квартир на этаже, Петя живёт на 9 этаже, в 5 подъезде.

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
2020/2021 УЧ. ГОД  
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР  
8 класс**

**II вариант**

1. В городе 160 тысяч человек поддерживают партию А, а 40 тысяч – партию Б. В области ситуация иная, в ней 140 тысяч сторонников партии Б и 60 тысяч – партии А. Сторонники партий распределены равномерно. Партия Б получила возможность распределить всё население города и области по четырём избирательным округам с равным количеством избирателей для проведения предстоящих выборов. В каком максимальном количестве округов она сможет выиграть?
- а) 0  
б) 1  
в) 2  
г) 3  
д) 4

*Ответ:* г. Наилучшей стратегией будет выделить половину города в один округ, а вторую половину включить в три совместных с областью округа. Так партия Б создаст для себя три выигрышных округа.

2. Сопоставьте коэффициенты в уравнении  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  с их значениями, если известно, что его корнями являются  $-1, \frac{1+3}{2}$ .

Коэффициенты:  $a, b, c, d$ ; возможные значения: 0, 1, -2, -3.

*Ответ:*  $a = 1, b = 0, c = -3, d = -2$ .

Даны три корня:  $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = -1$ .

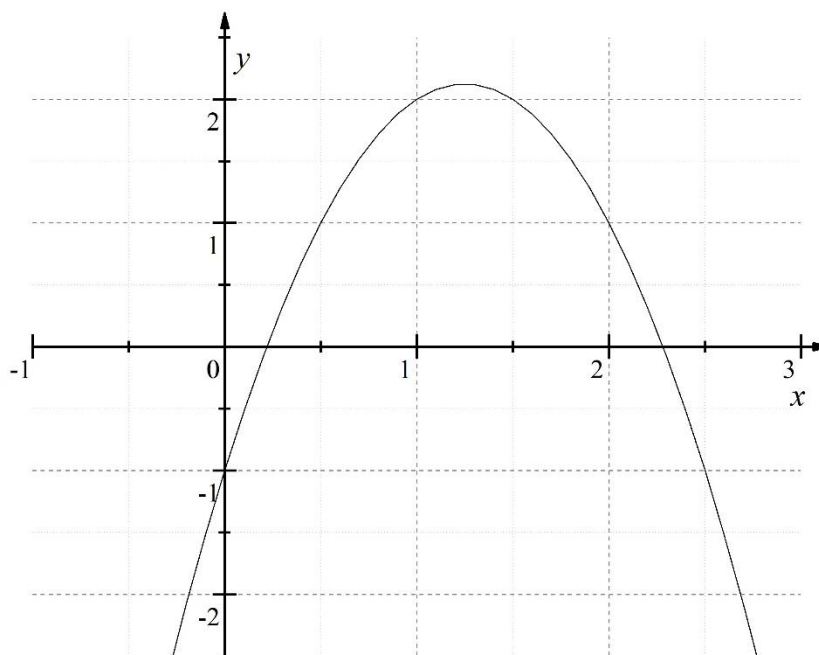
Значит, искомый многочлен имеет вид  $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - 3x - 2 = 0$ .

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 - 4y = 2xy + 5, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

*Ответ:*  $(-2;3), (1;0)$ . Приведя первое уравнение к виду  $(x - y)^2 + 4(x - y) - 5 = 0$ , мы можем решить его относительно  $x - y$ , получив корни  $-5$  и  $1$ . Тогда получаем две пары значений  $x$  и  $y$ :  $(-2;3), (1;0)$ .

4. Приведён график функции  $y = ax^2 + bx + c$ . Определите значения коэффициентов  $a, b, c$ .



*Ответ:*  $-2, 5, -1$ . Поскольку графику функции принадлежит точка  $(0; -1)$ , получаем, что  $c = -1$ . Далее, поскольку графику функции принадлежат точки  $(0,5; 1)$  и  $(2, 1)$ , решаем систему линейных уравнений относительно  $a$  и  $b$ :

$$\begin{cases} 4a + 2b = 2, \\ a + 2b = 8. \end{cases}$$

5. Определите, сумма цифр скольких восьмизначных чисел равна а) 2, б) 3, в) 4.

*Ответ:* а) 8, б)  $1(3 \text{ и семь нулей}) + 14(2 \text{ и } 1) + 21(C_7^2 \text{ в случае трёх единиц}) = 36$ , в)  $1+14+7$  (так как 4 можно представить как сумму двух двоек)  $+ 63(3C_7^2 \text{ в случае } 2, 1, 1) + 35(C_7^3 \text{ в случае четырёх единиц}) = 120$ .

6. Петя, листая справочник, узнал, что общая длина железных дорог в Румынии больше, чем в Польше, – 22 733 километра против 19 511. При этом его крайне удивило, что наибольший общий делитель этих чисел совпадает с номером его квартиры. На каком этаже и в каком подъезде живёт Петя, если количество квартир на этаже и число этажей в каждом подъезде его дома – квадраты простых чисел, причём сумма этих простых чисел равна номеру его подъезда? Число этажей больше

числа квартир на этаже, нумерация квартир начинается с первого этажа. Также укажите в ответе НОД.

*Ответ:* НОД этих чисел равен 179. Подходящие наборы числа квартир на этаже, этажности и подъезда: 4, 9, 5 и 9, 4, 5. Поскольку число этажей больше числа квартир на этаже, Петя живёт на 9 этаже, в 5 подъезде.