МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020/2021 УЧ. ГОД
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

11 класс

I вариант

1. Для каких значений *n* выполняется неравенство $n^{300} < 3^{500}$?

   а) 3

   б) 5

   в) 6

   г) 7

   д) 8

Ответ: а, б, в – максимальным *n* является 6.

2. Сопоставьте выражения с их значениями.

   1) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$, 2) $\arcsin\left((\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$, 3) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{\pi}\right)\right)$.

   а) $\frac{\pi}{2}$, б) $\dfrac{5\pi}{8}$, в) $\dfrac{3\pi}{8}$.

Ответ: 1б, 2в, 3а.

3. Решите уравнение $8^x + 1 = 9^x$.

Ответ: 1. Это единственный корень этого уравнения, что наглядно видно при приведении его к виду$\left(\frac{8}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{9}\right)^x = 1$. Левая часть этого уравнения монотонно убывает на всей числовой оси, поэтому уравнение имеет не более одного решения.

4. Центр *O* окружности, проходящей через середины сторон треугольника *ABC*, лежит на биссектрисе угла *BAC*. Найдите *AB*, если *AC* = 2, а *BC* =$\sqrt{39}$.

Ответ: 7. Рассмотрим окружность ω, проходящую через середины сторон *AB* и *AC* (C_1 и B_1) и вершину *A*. Радиусы двух имеющихся окружностей равны. Пусть прямая *OC* пересекает окружность ω в точке *P*. $PB_1 = PC_1$ и $OB_1 = OC_1$.

Если точки *O* и *P* не совпадают, то B_1C_1 и *OA* перпендикулярны, и, поскольку *OC* – биссектриса угла *BAC,* то *AB* = *AC* = 2. В таком случае получаем противоречие – *AB*+*AC*<*BC*.

Москва
2020/2021 уч.год

Если точки O и P совпадают, то мы можем определить угол A: $\angle B_1OC_1+\angle B_1AC_1 = 180^\circ$, $2\angle BAC+\angle BAC=180^\circ$, т.е. $\angle A = 60^\circ$. Тогда по теореме косинусов имеем $AB^2+4-2AB=39$, следовательно, $AB=7$.

5. Вычислите сумму $S_n = C_n^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 - \ldots$ для

а) $n=3$;

б) $n=5$;

в) $n=7$.

Ответ: а) −1, б) 0, в) 1. Можно проверить, что $S_0 = S_1 = 1$, $S_2 = 0$. При помощи индукции можно показать, что и далее при больших n выполняется равенство $S_n = S_{n-1} - S_{n-2}$.

6. В классе из 30 человек 20 отличников по физике и 10 – по математике. а) Если в классе у 5 человек нет отличной оценки ни по одному из этих предметов, то сколько учеников этого класса являются отличниками по физике и математике одновременно? б) Хуже дело обстоит с английским языком – по нему лишь 5 отличников. Сколько в этом классе отличников одновременно и по английскому языку, и по математике, если в нём есть 12 отличников хотя бы по одному из этих предметов? в) В классе только 2 человека получают пятёрки по всем трём предметам. А сколько учеников в классе не получают пятёрок ни по одному из них, если известно, что один ученик всё же имеет пятёрки и по физике, и по английскому языку?

Ответ: а) 5, б) 3, в) 4. Задача решается при помощи формулы включения-исключения, в п. а) ответ ищется как $20 + 10 - (30 - 5) = 5$, в п. б) как $10 + 5 - 12 = 3$, в в) как $30 - (20 + 10 + 5 - 5 - 3 - 3 + 2) = 4$.

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020/2021 УЧ. ГОД МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

11 класс

II вариант

1. Для каких значений *n* выполняется неравенство $n^{300} < 2^{500}$?

   а) 1

   б) 2

   в) 3

   г) 4

   д) 5

   Ответ: а, б, в – максимальным *n* является 3.

2. Сопоставьте выражения с их значениями.

   1) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$, 2) $\arcsin\left((\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$, 3) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{2}{\pi}\right)\right)$.

   а) $\frac{\pi}{2}$, б) $\frac{5\pi}{8}$, в) $\frac{3\pi}{8}$.

Ответ: 1б, 2в, 3а.

3. Решите уравнение $6^x + 3^x = 9^x$.

Ответ: 1. Это единственный корень этого уравнения, что наглядно видно при приведении его к виду $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$. Левая часть этого уравнения монотонно убывает на всей числовой оси, поэтому уравнение имеет не более одного решения.

4. Центр *O* окружности, проходящей через середины сторон треугольника *ABC*, лежит на биссектрисе угла *BAC*. Найдите *AB*, если *AC* = 2, а *BC* = $\sqrt{28}$.

Ответ: 6. Рассмотрим окружность ω, проходящую через середины сторон *AB* и *AC* (C_1 и B_1) и вершину *A*. Радиусы двух имеющихся окружностей равны. Пусть прямая *OC* пересекает окружность ω в точке *P*. $PB_1 = PC_1$ и $OB_1 = OC_1$.

Если точки *O* и *P* не совпадают, то B_1C_1 и *OA* перпендикулярны, и, поскольку *OC* – биссектриса угла *BAC,* то *AB* = *AC* = 2. В таком случае получаем противоречие – *AB*+*AC*<*BC*.

Москва
2020/2021 уч.год

Если точки O и P совпадают, то мы можем определить угол A: $\angle B_1OC_1+\angle B_1AC_1 = 180^{\circ}$, $2\angle BAC+\angle BAC=180^{\circ}$, т.е. $\angle A = 60^{\circ}$. Тогда по теореме косинусов имеем $AB^2+4-2AB=28$, следовательно, $AB = 6$.

5. Вычислите сумму $S_n = C_n^0 - C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 - \ldots$ для

а) $n=3$;

б) $n=5$;

в) $n=7$.

Ответ: а) -1, б) 0, в) 1. Можно проверить, что $S_0 = S_1 = 1$, $S_2 = 0$. При помощи индукции можно показать, что и далее при больших n выполняется равенство $S_n = S_{n-1} - S_{n-2}$.

6. В классе из 32 человек 20 отличников по физике и 10 – по математике. а) Если в классе у 5 человек нет отличной оценки ни по одному из этих предметов, то сколько учеников этого класса являются отличниками по физике и математике одновременно? б) Хуже дело обстоит с английским языком – по нему лишь 5 отличников. Сколько в этом классе отличников одновременно и по английскому языку, и по математике, если в нём есть 12 отличников хотя бы по одному из этих предметов? в) В классе только 2 человека получают пятёрки по всем трём предметам. А сколько учеников в классе не получают пятёрок ни по одному из них, если известно, что ещё один ученик всё же имеет пятёрки и по физике, и по английскому языку?

Ответ: а) 3, б) 3, в) 4. Задача решается при помощи формулы включения-исключения, в п. а) ответ ищется как $20 + 10 - (32 - 5) = 3$, в п. б) как $10 + 5 - 12 = 3$, в в) как $32 - (20 + 10 + 5 - 3 - 3 - 3 + 2) = 4$.