МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2020/2021 УЧ. ГОД МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

10 класс

I вариант

1. Для каких значений *n* выполняется неравенство $n^{300} < 3^{500}$?

а) 3

б) 5

в) 6

г) 7

д) 8

Ответ: а, б, в – максимальным *n* является 6.

2. Решите в целых числах уравнение $xy - 2x + 3y = 10$.

Ответ: (1;3), (−1;4), (−2;6).

Уравнение удобно представить в виде $(x+3)(y-2) = 4$ и найти целочисленные корни как делители числа 4.

3. Решите уравнение $7^x + 2^x = 9^x$.

Ответ: 1. Это единственный корень этого уравнения, что наглядно видно при приведении его к виду $\left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{2}{9}\right)^x = 1$. Левая часть этого уравнения монотонно убывает на всей числовой оси, поэтому уравнение имеет не более одного решения.

4. Центр *O* окружности, проходящей через середины сторон треугольника *ABC*, лежит на биссектрисе угла *BAC*. Кроме того, он лежит на окружности, проходящей через середины сторон *AB* и *AC* (точки C_1 и B_1 соответственно) и вершину *A*. Найдите *AB*, если *AC* = 2, а $BC = \sqrt{39}$.

Ответ: 7. Мы можем определить угол *A*, обратив внимание на приведённые в условии окружности: $\angle B_1OC_1 + \angle B_1AC_1 = 180^\circ$, $2\angle BAC + \angle BAC = 180^\circ$, т. е. $\angle A = 60^\circ$. Тогда по теореме косинусов имеем $AB^2 + 4 - 2AB = 39$, следовательно, $AB = 7$.

Москва
2020/2021 уч.год

5. Вычислите следующие выражения:

а) $C_3^0 + 3C_3^1 + 9C_3^2 + 27C_3^3$;

б) $C_5^0 - C_5^1 + C_5^2 - C_5^3 + C_5^4 - C_5^5$;

в) $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

Ответ: проще всего воспользоваться формулой бинома Ньютона, тогда а) $(1+3)^3=64$, б) $(1-1)^5 = 0$, в) $(1+1)^6 = 64$.

6. В классе из 30 человек 20 отличников по физике и 10 – по математике. а) Если в классе у 5 человек нет отличной оценки ни по одному из этих предметов, то сколько учеников этого класса являются отличниками по физике и математике одновременно? б) Хуже дело обстоит с английским языком – по нему лишь 5 отличников. Сколько в этом классе отличников одновременно и по английскому языку, и по математике, если в нём есть 12 отличников хотя бы по одному из этих предметов? в) В классе только 2 человека получают пятёрки по всем трём предметам. А сколько учеников в классе не получают пятёрок ни по одному из них, если известно, что ещё один ученик всё же имеет пятёрки и по физике, и по английскому языку?

Ответ: а) 5, б) 3, в) 4. Задача решается при помощи формулы включения-исключения, в п. а) ответ ищется как $20 + 10 - (30 - 5) = 5$, в п. б) как $10 + 5 - 12 = 3$, в в) как $30 - (20 + 10 + 5 - 5 - 3 - 3 + 2) = 4$.

МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
2020/2021 УЧ. ГОД
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР
10 класс

II вариант

1. Для каких значений n выполняется неравенство $n^{300} < 2^{500}$?

а) 1

б) 2

в) 3

г) 4

д) 5

Ответ: а, б, в – максимальным n является 3.

2. Решите в целых числах уравнение $xy - 2x + 3y = 10$.

Ответ: (1;3), (−1;4), (−2;6), (−4;-2), (−5;0) , (−7;1).

Уравнение удобно представить в виде $(x + 3)(y - 2) = 4$ и найти целочисленные корни (1;3), (−1;4), (−2;6) как делители числа 4. Корни (−4;-2), (−5;0) , (−7;1) получаются в том случае, если рассмотреть оба сомножителя с отрицательным знаком.

3. Решите уравнение $5^x + 2^x = 7^x$.

Ответ: 1. Это единственный корень этого уравнения, что наглядно видно при приведении его к виду $\left(\frac{5}{7}\right)^x + \left(\frac{2}{7}\right)^x = 1$. Левая часть этого уравнения монотонно убывает на всей числовой оси, поэтому уравнение имеет не более одного решения.

4. Центр O окружности, проходящей через середины сторон треугольника ABC, лежит на биссектрисе угла BAC. Кроме того, он лежит на окружности, проходящей через середины сторон AB и AC (точки C_1 и B_1 соответственно) и вершину A. Найдите AB, если $AC = 2$, а $BC = \sqrt{28}$.

Москва
2020/2021 уч.год

Ответ: 6. Мы можем определить угол A, обратив внимание на приведённые в условии окружности: $\angle B_1OC_1+\angle B_1AC_1 = 180^{\circ}$, $2\angle BAC+\angle BAC=180^{\circ}$, т. е. $\angle A = 60^{\circ}$. Тогда по теореме косинусов имеем $AB^2+4-2AB=28$, следовательно, $AB=6$.

5. Вычислите следующие выражения:

а) $C_3^0 + 3C_3^1 + 9C_3^2 + 27C_3^3$;

б) $C_5^0 - C_5^1 + C_5^2 - C_5^3 + C_5^4 - C_5^5$;

в) $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

Ответ: проще всего воспользоваться формулой бинома Ньютона, тогда а) $(1+3)^3=64$, б) $(1-1)^5 = 0$, в) $(1+1)^6 = 64$.

6. В классе из 32 человек 20 отличников по физике и 10 – по математике. а) Если в классе у 5 человек нет отличной оценки ни по одному из этих предметов, то сколько учеников этого класса являются отличниками по физике и математике одновременно? б) Хуже дело обстоит с английским языком – по нему лишь 5 отличников. Сколько в этом классе отличников одновременно и по английскому языку, и по математике, если в нём есть 12 отличников хотя бы по одному из этих предметов? в) В классе только 2 человека получают пятёрки по всем трём предметам. А сколько учеников в классе не получают пятёрок ни по одному из них, если известно, что ещё один ученик всё же имеет пятёрки и по физике, и по английскому языку?

Ответ: а) 3, б) 3, в) 4. Задача решается при помощи формулы включения-исключения, в п. а) ответ ищется как $20 + 10 - (32 - 5) = 3$, в п. б) как $10 + 5 - 12 = 3$, в в) как $32 - (20 + 10 + 5 - 3 - 3 - 3 + 2) = 4$.