

Решения Математического праздника Математической Вертикали 2021 г. 6 класс

Задача 1.

Ответ: а) 1 страус и 1 зебра; б) 3 страуса и 3 зебры.

Решение. В сарае изначально $3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16$ ног. Перебежали на пастбище 6 ног, значит перебежали либо 3 страуса, либо страус и зебра. Но страусов в сарае всего 2, значит, в полдень перебежали один страус и одна зебра. А в сарае при этом осталось 2 зебры и 1 страус.

У водопооя изначально $1 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 10$ ног. Перебежали в сарай 8 ног. Это могли быть 2 зебры, 1 зебра и 2 страуса или 4 страуса. Но у водопооя всего 1 зебра и всего 3 страуса. Значит, в сарай перебежали 1 зебра и 2 страуса. Итого в сарае стало 3 страуса и 3 зебры.

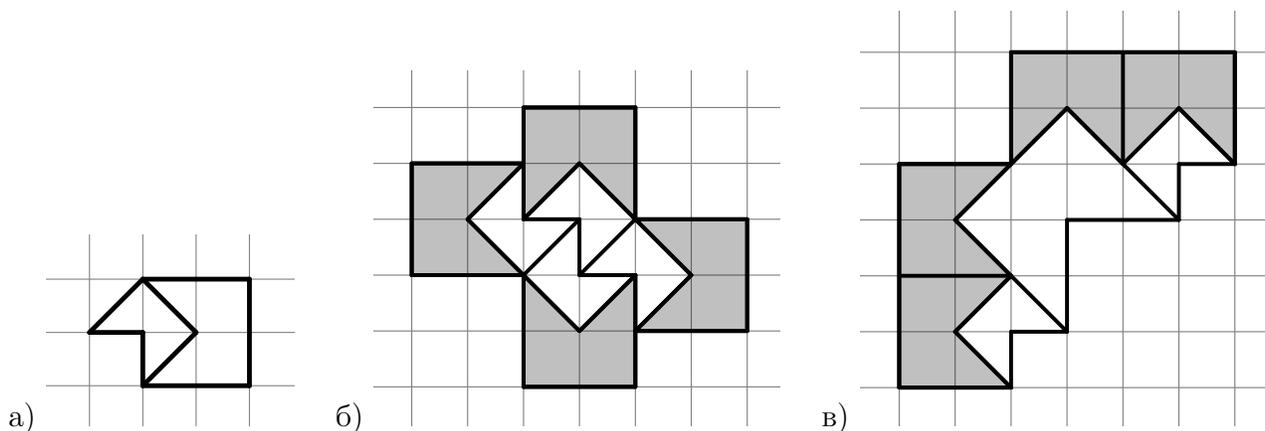
Задача 2.

Ответ: а) $\frac{4}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{21}$; б) $\frac{4}{3} : \frac{7}{5} = \frac{20}{21}$; в) $\frac{9}{7} - \frac{1}{3} = \frac{20}{21}$; г) $\frac{2}{7} + \frac{4}{6} = \frac{20}{21}$;

Решение. В пункте а) достаточно было представить числитель и знаменатель в виде произведения двух цифр. Например, $20 = 4 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$, поэтому $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{20}{21}$. Пункт б) можно было сделать из соображения того, что операция деления обратная к операции умножения и поэтому $\frac{4}{3} : \frac{7}{5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{20}{21}$. Для подбора дробей в пункте в) нужно было выбрать знаменатели, которые в произведении давали 21, что означало, что после приведения к общему знаменателю у дроби будет знаменатель 21. Оставалось подобрать нужные числители.

В пункте г) не бывает необходимых несократимых дробей со знаменателями 3 и 7. Идея решения состояла в том, чтобы представить дробь $\frac{20}{21}$ как $\frac{40}{42}$ и искать дроби со знаменателями 7 и 6.

Задача 3. Ниже показано как можно разрезать каждую из фигур.



Задача 4.

Ответ: 1 м.

Решение. В условии ничего не сказано про направление движения муравьёв. Всего возможны четыре состояния.

1. Муравьи движутся навстречу друг другу.
2. Муравьи удаляются друг от друга, двигаясь в противоположных направлениях.
3. Более быстрый муравей находится позади более медленного и приближается к нему (догоняет).
4. Более быстрый муравей находится впереди более медленного и удаляется от него.

Ясно, что ситуация 1 со временем может превратиться в ситуацию 2, а ситуация 3 — в ситуацию 4. Но если муравьи в некоторый момент попали в ситуацию 2 или 4, то с этого момента они будут всегда удаляться друг от друга.

Мы знаем расстояние между муравьями в три момента времени. Заметим, что между первым и вторым моментом прошло 2 минуты, а расстояние между муравьями уменьшилось на 4 метра. Между вторым и третьим моментом прошло 4 минуты, а расстояние уменьшилось на 2 метра. Поскольку оба раза расстояние уменьшалось, можно быть уверенным, что и через 3, и через 5 минут после начала наблюдения муравьи не находились в состоянии “удаления” друг от друга, то есть они могли быть только в состояниях 1 или 3.

Если бы встреча между ними не произошла и в следующие 4 минуты (с 5-й по 9-ю), то они бы оставались в том же состоянии (1 или 3) и по-прежнему сближались бы со скоростью 4 м за 2 минуты, то есть должны были бы за 4 минуты сблизиться на 8 м. Но расстояние между ними уменьшилось только на 2 м, значит, когда-то между 2-м и 3-м моментами времени произошла встреча.

После встречи муравьи удаляются с той же скоростью, что и сближались (в ситуациях 1 и 2 скорости сближения и удаления равны сумме скоростей муравьёв, а в ситуациях 3 и 4 — разности их скоростей). Значит, за 4 минуты расстояние между муравьями сократилось с 5 м до нуля и затем выросло от нуля до 3 м. Всего 8 м за 4 минуты, что соответствует найденной ранее скорости сближения. А минутой ранее расстояние было на 2 метра меньше. Значит, через 8 минут после начала движения расстояние между муравьями было равно 1 метру.

Задача 5.

Ответ: 83859206147.

Решение. Несложно убедиться, что номер 83859206147 подходит под условие задачи. Для этого достаточно выписать коды цифр 0, 1, 2, ..., 9 в таком же порядке:



Докажем, что не могло быть других вариантов и, заодно покажем как найти это решение.

Заметим, что символ , обозначающий по условию цифру 8, имеет по одному общему отрезку с символами , и . Значит, три последних символа могут быть равны только 9, 7 и 6. А так как их ровно 3, то все остальные символы кодируют цифры, меньшие 6. Теперь заметим, что символ имеет общий отрезок с символами и . Но поскольку оба последних символа меньше 6, то символ не может быть больше 6, а значит, он кодирует как раз цифру 6. Легко видеть, что символ , имеющий с ним общий отрезок, не может тогда кодировать цифру 9, так как 9 и 6 отличаются более, чем на 2. Следовательно, он кодирует цифру 7, а символ кодирует цифру 9.

Символы и , как мы уже выяснили кодируют цифры 4 и 5, правда ещё не известно какой именно символ соответствует 4, а какой — 5. Заметим, что символ имеет общий отрезок ещё с двумя символами: и . Значит, он не может быть равен 5, потому что оба последних символа меньше 4, а значит, один из них не больше 2. Получаем, что кодирует 4, а — 5.

По аналогичным соображениям можно увидеть, что символ имеет общий отрезок с двумя другими символами: и , а значит, он равен 2, а символ — 3. Наконец, поскольку символ имеет общий отрезок с , обозначающий 3, то он не может быть равен 0, а значит, кодирует 1. код 0 определяется автоматически.

Задача 6.

Решение. а) Посмотрим на квадратик, расположенный на передней слева грани, граничащий с двумя поставленными крестиками. У него уже есть два соседних крестика. Это значит, что два других квадратика, с которыми он граничит должны быть ноликами, чтобы условие выполнялось. Но эти два квадратика граничат с левым ближним квадратиком на верхней грани. Получается, что у этого квадратика будет уже три граничащих с ним нолика, что противоречит условию.

б) Существует несколько видов расстановок крестиков и ноликов, удовлетворяющих условию. Один из способов может быть описан следующим образом: если положить кубик на пол, то на нижней грани будут все крестики, на верхней — все нолики, на нижнем уровне (на высоте 1 по бокам) будет “пояс” из крестиков, на на втором уровне (на высоте 2 по бокам) будет “пояс” из ноликов.