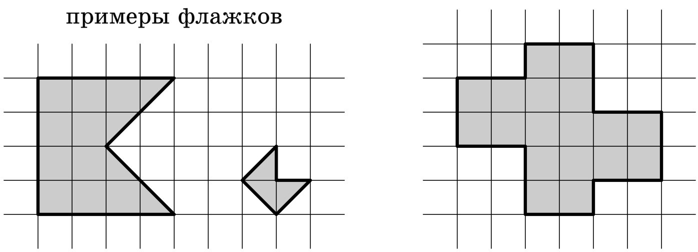
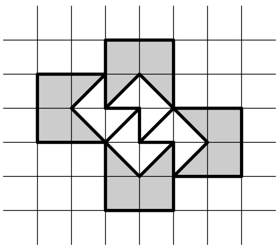
7 класс

Задача 1. Будем называть *флажком* пятиугольник, вершины которого — вершины некоторого квадрата и его центр. Разрежьте фигуру ниже справа на флажки (не обязательно одинаковые). **[*3 балла*]**



(*М. А. Волчкевич, Т. А. Казицына*)

Ответ.



Задача 2. См. задачу 3 для 6 класса. **[*5 баллов*]**

Задача 3. См. задачу 4 для 6 класса. **[*7 баллов*]**

Задача 4. Фокусник научил Каштанку лаять столько раз, сколько он ей тайком от публики покажет. Когда Каштанка таким способом правильно ответила, сколько будет дважды два, он спрятал вкусный кекс в чемодан с кодовым замком и сказал:

— Восьмизначный код от чемодана — решение ребуса УЧУЙ = КЕ $\times$ КС. Надо заменить одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные разными так, чтобы получилось верное равенство. Пролай нужное число раз на каждую из восьми букв, и получишь угощение.

Но тут случился конфуз. Каштанка от волнения на каждую букву лаяла на 1 раз больше, чем надо. Конечно, чемодан не открылся. Вдруг раздался детский голос: «Нечестно! Собака правильно решила ребус!» И действительно, если каждую цифру решения, которое имел в виду фокусник, увеличить на 1, получится ещё одно решение ребуса!

Можно ли восстановить: а) какое именно решение имел в виду фокусник; б) чему равнялось число УЧУЙ в этом решении? **[*7 баллов*]**

(*А. К. Кулыгин, Т. А. Корчемкина, И. В. Раскина*)

Ответ. а) Нет. б) Да, УЧУЙ $=2021$.

Решение. а) Заметим, что КЕ и КС заменяют разные числа, но от их перестановки произведение УЧУЙ не изменится. Значит, для каждого решения ребуса есть парное, где цифры, соответствующие Е и С, поменяны местами. Поэтому однозначно восстановить решение, задуманное фокусником, не получится.

б) После увеличения всех цифр на 1 получилось снова решение ребуса, значит,

$$\text{УЧУЙ}+1111=(\text{КЕ}+11)(\text{КС}+11)=$$
$$=\text{КЕ}\cdot\text{КС}\ +11\cdot\text{КЕ}+11\cdot\text{КС}+11\cdot 11.$$

Поскольку при этом УЧУЙ $=$ КЕ $\cdot$ КС, получаем, что

$$1111=11\cdot\text{КЕ}+11\cdot\text{КС}+11\cdot 11,$$
$$101=\text{КЕ}+\text{КС}+11,$$
$$\text{КЕ}+\text{КС}=90,$$

то есть

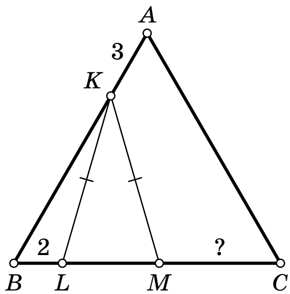
$$10\cdot\text{К}+\text{Е}+10\cdot\text{К}+\text{С}=90,$$
$$20\cdot\text{К}+\text{Е}+\text{С}=90.$$

Заметим, что Е $+$ С — это число от 1 до 17, а значит, $20\cdot$К — число от 73 до 89, которое делится на 20. Тогда $20\cdot\text{К}=80$ и К $=4$, а Е $+$ С $=10$.

Цифры Е и С — разные, ни одна из них не равна 4, а также ни одна из них не равна 9 (иначе бы при добавлении 1 к каждой цифре произошёл бы переход через десяток, который изменит ровно одну из цифр на месте букв У или К, и итог не будет решением ребуса). Тогда для равенства $\text{Е} + \text{С} = 10$ остаётся только два варианта: $2 + 8$ и $3 + 7$.

Тогда $\text{КЕ} \cdot \text{КС} = 42 \cdot 48 = 2016$ или $\text{КЕ} \cdot \text{КС} = 43 \cdot 47 = 2021$. Но в слове УЧУЙ совпадают первая и третья буква, а значит, подходит только вариант $\text{УЧУЙ} = 2021$.

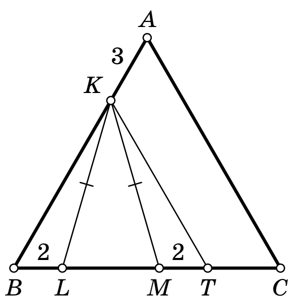
Задача 5. Дан правильный треугольник ABC. На стороне AB отмечена точка K, на стороне BC — точки L и M (L лежит на отрезке BM) так, что $KL = KM$, $BL = 2$, $AK = 3$. Найдите CM. **[*7 баллов*]**



(*Е. В. Бакаев*)

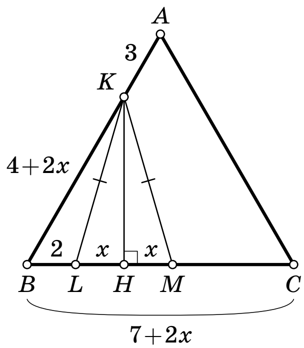
Ответ. 5.

Решение. Отметим на продолжении отрезка LM за точку M такую точку T, что $MT = 2$. Углы BLK и TMK равны, так как они смежные с равными углами равнобедренного треугольника KLM. Значит, треугольники BLK и TMK равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда равны их соответствующие углы: $\angle KTM = \angle KBL = 60^\circ$.



В треугольнике KBT два угла по 60°, поэтому он равносторонний, и $BK = BT$. Так как треугольник ABC тоже равносторонний и $BA = BC$, то $CT = BC - BT = BA - BK = AK = 3$ (и точка T лежит именно на стороне BC, а не на её продолжении). Тогда $CM = CT + MT = 3 + 2 = 5$.

Второе решение. Проведём высоту KH равнобедренного треугольника KLM. Она также является его медианой, поэтому $LH = HM$. Обозначим $LH = HM = x$. Треугольник KBH — прямоугольный с углом B, равным 60°, а значит, его гипотенуза KB в 2 раза больше его катета BH. Так как $BH = 2 + x$, то $KB = 2BH = 4 + 2x$, а тогда $BA = BK + KA = 4 + 2x + 3 = 7 + 2x$. Треугольник ABC равносторонний, поэтому $BC = BA = 7 + 2x$. А значит, $MC = BC - BM = (7 + 2x) - (2 + 2x) = 5$.



Задача 6. Пять друзей подошли к реке и обнаружили на берегу лодку, в которой могут поместиться все пятеро. Они решили покататься на лодке. Каждый раз с одного берега на другой переправляется компания из одного или нескольких человек. Друзья хотят организовать катание так, чтобы каждая возможная компания переправилась ровно один раз. Получится ли у них это сделать?

[*9 баллов*] (*А. В. Грибалко*)

Ответ. Не получится.

Решение. Предположим, что друзьям удастся осуществить желаемое. Давайте посчитаем, сколько всего возможных компаний можно составить из пяти человек (и, соответственно, сколько раз переплывёт лодка с одного берега на другой). Каждый человек может либо войти, либо не войти в компанию, то есть для каждого есть два варианта, поэтому всего вариантов $2^5 = 32$. В том числе мы посчитали вариант, когда никто не попал в компанию. Однако лодка пустая не плавает, значит, всего компаний $32 - 1 = 31$. Так как это число нечётно, то друзья должны переплыть реку нечётное количество раз, поэтому в итоге лодка окажется на противоположном берегу. Следовательно, хотя бы один из друзей завершит катание на другом берегу, пусть это будет Вася.

Посмотрим, сколько раз он мог переправиться. Каждый из его друзей может либо плыть, либо не плыть с ним, поэтому Вася входит в $2^4 = 16$ различных компаний (в том числе он может плыть и один). Но это число чётно, значит, после катания Вася должен вернуться на исходный берег. Полученное противоречие доказывает, что покататься требуемым образом не получится.