LXXXIV Московская математическая олимпиада

28 марта 2021 года • 11 класс, 1 день

Задача 1. На доске записано натуральное число. Если у него стереть последнюю цифру (в разряде единиц), то останется ненулевое число, которое будет делиться на 20, а если первую — то на 21. Какое наименьшее число может быть записано на доске, если его вторая цифра не равна 0?

Задача 2. Существует ли функция f, определённая на отрезке $[-1;1]$, которая при всех действительных x удовлетворяет равенству

$$2f(\cos x) = f(\sin x) + \sin x?$$

Задача 3. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Точки X и Y — середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника MXY касается окружности ω.

Задача 4. В некоторой стране есть 100 городов, которые связаны такой сетью дорог, что из любого города в любой другой можно проехать только одним способом без разворотов. Схема сети дорог известна, развилки и перекрестки сети необязательно являются городами, всякая тупиковая ветвь сети обязательно заканчивается городом. Навигатор может измерить длину пути по этой сети между любыми двумя городами. Можно ли за 100 таких измерений гарантированно определить длину всей сети дорог?

Задача 5. Многогранник с вершинами в серединах рёбер некоторого куба называется *кубооктаэдром.* В сечении кубооктаэдра плоскостью получился правильный многоугольник. Какое наибольшее число сторон он может иметь?

Задача 6. *Верхней целой частью* числа x называют наименьшее целое число, большее или равное x. Существует ли такое число A, что для любого натурального n расстояние от верхней целой части A^n до ближайшего квадрата натурального числа всегда равно 2?

Задачи, решения, информация о втором дне и о закрытии LXXXIV Московской математической олимпиады — на сайте mccme.ru/mmo/