

ММО — 2021, 8 класс.

**Задача 1.** (*М. Евдокимов*) Барон Мюнхгаузен утверждает, что к любому двузначному числу можно справа приписать еще две цифры, чтобы получился полный квадрат (к примеру, если задано число 10, то дописываем 24 и получаем  $1024 = 32^2$ ). Прав ли барон?

*Ответ.* Барон не прав.

*Первое решение.* Заметим, что  $99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 + 1 = 9801 < 9900$ , а  $100^2 = 10000 > 9999$ . Таким образом, четырехзначных точных квадратов, начинающихся на 99 не существует, поэтому к числу 99 нельзя приписать две цифры так, чтобы получился точный квадрат.

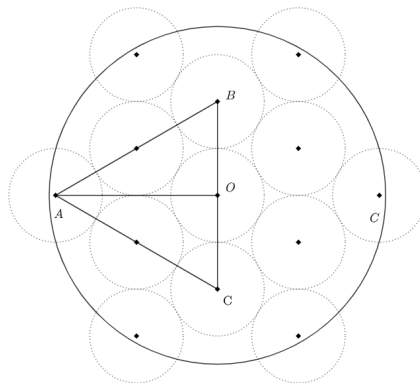
*Второе решение.* Пусть барон прав. Двузначных чисел 90, поэтому если к каждому приписать две цифры так, чтобы получился точный квадрат, то получится 90 четырехзначных точных квадратов. Но четырехзначных точных квадратов всего 68, так как  $31^2 = 961 < 1000$ , а  $100^2 > 9999$ . Противоречие.

*Комментарий.* Всего существует 25 двузначных чисел, к которым нельзя приписать две цифры так, чтобы получился точный квадрат. Про каждое из них можно провести рассуждение, аналогичное первому решению.

**Задача 2.** (*Д. Мухин*) Митя купил на день рождения круглый торт диаметром 36 сантиметров и 13 тоненьких свечек. Мите не нравится, когда свечи стоят слишком близко, поэтому он хочет поставить их на расстоянии не меньше 10 сантиметров друг от друга. Поместятся ли все свечки на торте?

*Ответ.* Поместятся.

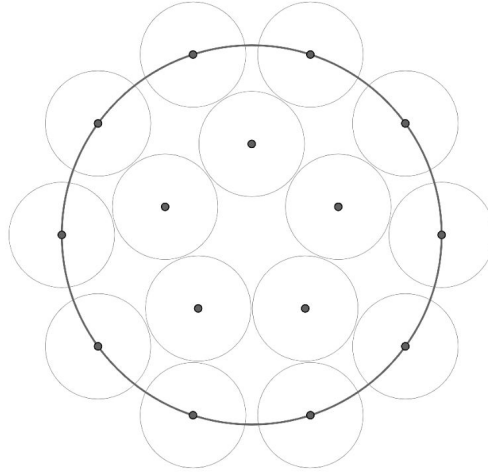
*Решение.* Разместим свечи так, как показано на рисунке. Докажем, что отрезок  $OA$  меньше радиуса, то есть самые удаленные от центра точки лежат внутри круга. В самом деле,  $ABC$  — равносторонний треугольник со стороной 20 см. Тогда его высота  $AO = 10\sqrt{3}$  см  $< 18$  см, так как  $(10\sqrt{3})^2 = 300 < 324 = 18^2$ .



*Комментарий.* 1. На самом деле  $2 \cdot OA = 20\sqrt{3}$  см меньше даже 35 см, поэтому такая конструкция поместится на торте диаметром 35 см.

2. Приведем без доказательства несколько более сложную конструкцию, ко-

торая позволяет на торте торте диаметром 36 см поместить 15 свечек (а в то же время для 13 свечек при аналогичной конструкции достаточно торта диаметром 33 см).



**Задача 3.** (*М. Дидин*) В комнате стоит несколько детей у кучи из 2021 конфеты. Каждый из них по очереди подходит к куче, делит количество конфет в ней на количество детей в комнате (включая себя), округляет, забирает полученное число конфет и покидает комнату. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков после этой процедуры не будет зависеть от порядка детей в очереди.

*В решениях этой задачи переменные будем подразумевать целочисленными.*

*Первое решение.* Докажем, что если поменять местами любых двух детей, то количество конфет у мальчиков и у девочек не изменится. Так как такими перестановками можно добиться любого порядка детей в очереди, то это и будет означать, что общее количество конфет у мальчиков не зависит от этого порядка.

В самом деле, ясно, что если поменять местами двух девочек или двух мальчиков, то для детей ни до, ни после этой пары ничего изменится, не изменится и общее количество конфет у мальчиков.

Теперь пусть осталось всего  $k$  детей, и перед кучей из  $n$  конфет стоит пара мальчик и девочка. Если  $n$  делится  $k$ , то легко видеть, что они оба возьмут по  $\frac{n}{k}$  конфет вне зависимости от порядка. Далее будем считать, что  $n$  делится на  $k$  с остатком  $r > 0$ . Тогда  $n = kq + r$ , мальчик возьмет  $q + 1$  конфету и оставит  $(k - 1)q + r - 1$  конфет, девочка за ним возьмет  $q$  конфет. А если бы сначала подошла девочка, то она бы взяла  $q$  конфет и оставила бы  $(k - 1)q + r$ , а мальчик за ней взял бы  $q + 1$  конфету. Таким образом, эта пара берет одно и тоже количество конфет вне зависимости от порядка, а значит ни для них, ни для детей за ними ничего не изменится, что и требовалось.

*Второе решение.* Пусть всего в комнате  $n$  детей, причем  $2021 = an + r$ ,  $0 \leq r < n$ . К куче подходит первый ребенок и делит ее на кучки размером  $a$  и

кучки размером  $a + 1$  (общее количество кучек равно  $n$ , а кучек размером  $a + 1$  ровно  $r$ ), причем все большие кучки лежат правее маленьких.

Пусть первый ребенок — мальчик, тогда он берет себе самую правую кучку и уходит. Если же это оказалась девочка — она возьмет себе самую левую кучку и тоже уйдет. Потом к конфетам подойдет следующий ребенок; перед ним лежит  $n - 1$  кучка из  $a$  или  $a + 1$  конфет.

Если остались кучки обоих видов, то это означает, что неполное частное от деления количества конфет на число детей равно  $a$  и далее процесс продолжается аналогично: мальчики, округляя вверх, берут себе кучки справа, девочки, округляя вниз, — слева.

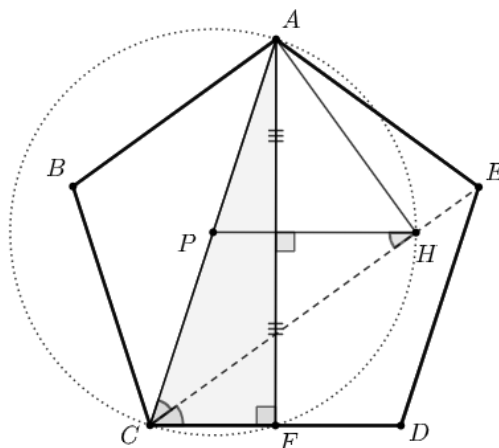
Если же остались только кучки одного вида то количество конфет делится на количество детей, и любому ребенку подходит любая кучка, то есть и в этом случае мальчики могут брать кучки справа, а девочки — слева.

Тогда в итоге, мальчики заберут все правые кучки (столько, сколько было мальчиков), независимо от того, в каком порядке дети подходили за конфетами.

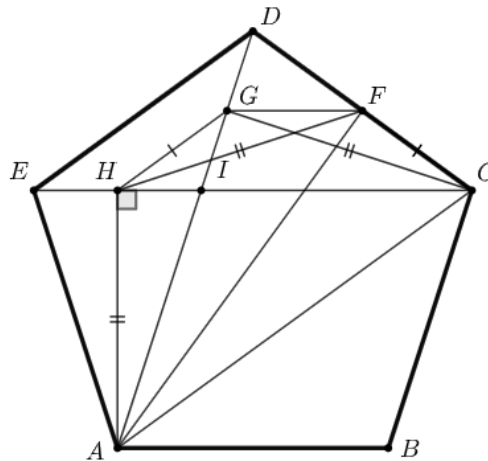
**Задача 4.** (А. Блинков) В правильном пятиугольнике  $ABCDE$  отмечена точка  $F$  — середина  $CD$ . Серединный перпендикуляр к  $AF$  пересекает  $CE$  в точке  $H$ . Докажите, что прямая  $AH$  перпендикулярна прямой  $CE$ .

*Первое решение.* Угол пятиугольника равен  $108^\circ$ , тогда  $\angle ECD = \angle CED = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$ , а  $\angle ACD = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ . Таким образом,  $CE$  содержит биссектрису треугольника  $ACF$  и следовательно, пересекает серединный перпендикуляр к стороне  $AF$  в точке на описанной окружности около этого треугольника. Но  $\angle F$  — прямой, значит и  $\angle AHC$  — прямой, как опирающийся на ту же дугу.

*Второе решение.* Аналогично первому решению  $\angle ACE = \angle ECD = 36^\circ$ . Так как  $HP \parallel CD$ , то по теореме Фалеса  $AP = PC$ , где  $P$  — точка пересечения серединного перпендикуляра к  $AF$  с диагональю  $AC$ , а также как внутренние накрест лежащие равны  $\angle PHC = \angle ECD = 36^\circ$ . Следовательно, треугольник  $PHC$  — равнобедренный и  $PH = PC$ . Окончательно получаем, что  $HP = PA = PC$  и треугольник  $AHC$  — прямоугольный, так как его медиана равна половине стороны, к которой она проведена.



*Третье решение.* Переформулируем немного задачу: пусть  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на прямую  $CE$ . Тогда достаточно доказать, что полученная таким образом точка  $H$  равноудалена от  $A$  и  $F$ . Пусть диагонали  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $I$ . Отметим еще точку  $G$  — середину отрезка  $DI$ . Заметим, что треугольник  $AEI$  — равнобедренный ( $\angle AEI = \angle AIE = 72^\circ$ ). Тогда  $H$  — середина  $EI$ . Четырехугольник  $HGFC$  — равнобокая трапеция, так как  $GF \parallel IC$  (как средняя линия треугольника  $IDC$ ), а  $HG = 1/2DE = 1/2DC = FC$ .  $AHGC$  — тоже равнобокая трапеция, потому что  $HG \parallel DE \parallel AC$  и  $AG = CH$ . Окончательно получаем, что  $AH = CG = HF$ . Что и требовалось доказать.



**Задача 5.** (*М. Евдокимов*) В каждом из 16 отделений коробки  $4 \times 4$  лежит по золотой монете. Коллекционер помнит, что какие-то две лежащие рядом монеты (соседние по стороне) весят по 9 грамм, а остальные по 10 грамм. За какое наименьшее число взвешиваний на весах, показывающих общий вес в граммах, можно определить эти две монеты?

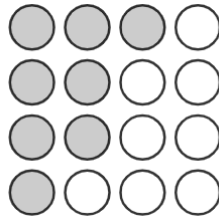
*Ответ.* За три взвешивания.

*Решение.* Отметим, что взвешивание любой группы монет может показать один из трех исходов: 0, 1 или 2 легкие монеты среди взвешенных. Действительно, эти исходы соответствуют показаниям весов в  $10k$ ,  $10k - 1$  и  $10k - 2$  граммов, где  $k$  — количество монет на весах, а ничего другого при взвешивании  $k$  монет веса показать не могут.

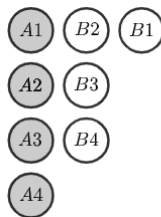
Теперь докажем, что менее, чем тремя взвешиваниями, обойтись не получится. Всего пар монет, которые могут быть легкими 24: по 3 пары соседних монет в каждой строчке и в каждом столбце. Так как одно взвешивание дает три разных исхода, то два взвешивания дадут лишь  $3^2 = 9$  различных исходов.

Покажем, как определить легкие монеты за три взвешивания.

Первое взвешивание. Разобьем монеты на две группы так, как показано на рисунке, и взвесим одну них. Так как группы симметричны, то возможны два различных случая: легкие монеты в одной группе и легкие монеты в разных группах.



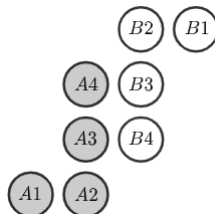
1) Первый случай (легкие монеты в одной группе), второе взвешивание. Оставим на рисунке только те монеты, которые могут оказаться легкими, разобьем их на две группы и пронумеруем. Взвесим одну из групп. Здесь возможны три случая: обе легкие монеты в группе  $A$ , обе легкие монеты в группе  $B$ , по одной легкой монете в каждой из групп.



Хотя в этом взвешивании группы не симметричны, ситуации с обеими монетами в одной группе разбираются аналогично. Возможные пары легких монет:  $(X_1, X_2)$ ,  $(X_2, X_3)$  и  $(X_3, X_4)$  соответствующей группы, где  $X$  — группа с легкими монетами. Поэтому третьим взвешиванием взвесим монеты  $X_1$  и  $X_2$ . Либо они обе легкие, и тогда мы их нашли, либо среди них одна легкая, и тогда легкие монеты это  $X_2$  и  $X_3$ , либо среди них легких нет, и тогда легкие монеты —  $X_3$  и  $X_4$ .

Если легкие монеты в разных группах, то это могут быть «горизонтальные» пары  $(A_1, B_2)$ ,  $(A_2, B_3)$  или  $(A_3, B_4)$ . Тогда третьим взвешиванием взвесим монеты  $A_1, B_2$  и  $A_2$ . Если среди них две легкие, то это  $A_1$  и  $B_2$ . Если одна — то легкие монеты это  $A_2$  и  $B_3$ , если легких нет — то  $A_3$  и  $B_4$ .

2) Второй случай (легкие монеты в разных группах), второе взвешивание. Оставим на рисунке только те монеты, которые могут оказаться легкими, разобьем их на две группы и пронумеруем. Взвесим одну из групп. Так как группы симметричны, то возможны два различных случая: легкие монеты в одной группе и легкие монеты в разных группах.



Ситуация, когда обе легкие монеты в одной группе разбирается точно так же, как и в третьем взвешивании первого случая, но монеты  $X_3$  и  $X_4$  легкими оказаться не могут.

Если легкие монеты в разных группах, то это либо пара  $(A_3, B_4)$ , либо пара  $(A_4, B_3)$ . Чтобы найти легкие монеты, третьим взвешиванием достаточно взвесить одну из этих пар.

*Комментарий.* Приведем некоторые соображения, которые позволяют построить алгоритм. Одним взвешиванием, так как оно имеет три различных исхода, мы можем определить пару легких из трех подозрительных пар — и в первую очередь нас интересует не общее число монет, а именно общее число пар монет, которые могут быть легкими. Аналогично два взвешивания позволяют определить пару легких из не более девяти подозрительных пар. Это означает, что при любом результате первого взвешивания должно остаться не более девяти подозрительных пар монет. В приведенном алгоритме остается как раз 9 пар, если монеты в одной группе, и 6 пар, если в разных.

**Задача 6.** (*А. Заславский*) В некотором государстве 32 города, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Министр путей сообщения, тайный злодей, решил так организовать движение, что покинув любой город, в него нельзя будет вернуться. Для этого он каждый день, начиная с 1 июня 2021 года, может менять направление движения на одной из дорог. Докажите, что он сможет добиться своего к 2022 году (то есть у него есть 214 дней).

*Решение.* Докажем общую формулу. Пусть в государстве  $2^n$  городов. Тогда премьер-министр сможет добиться желаемого не более, чем за  $2^{n-2}(2^n - n - 1)$  дней.

*Лемма.* Пусть в государстве  $2k$  городов, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Выберем из них половину с наибольшим числом исходящих дорог. Тогда всего из выбранных городов исходит суммарно не менее  $k^2$  дорог.

*Доказательство.* Пусть из  $k$  выбранных городов исходит менее  $k^2$  дорог, тогда по принципу Дирихле найдется город из которого исходит не более  $k - 1$  дороги. Тогда, так как выбраны города с наибольшим числом исходящих дорог, из каждого из оставшихся  $k$  городов исходит также не более  $k - 1$  дороги. Суммарно исходит менее  $k^2 + k(k - 1) = 2k^2 - k$  дорог, при том, что общее число дорог в точности  $\frac{2k(2k-1)}{2} = 2k^2 - k$ . Противоречие, лемма доказана.

Теперь перейдем к доказательству основной формулы. Докажем ее по индукции. База  $n = 1$ : между двумя городами только одна дорога и она уже и так в одном направлении. Ничего менять не придется.

*Шаг.* Пусть для  $2^n$  городов утверждение верно. Докажем для  $2^{n+1}$ . Разделим города на две группы по  $2^n$  городов. В первую группу поместим города с наибольшим количеством исходящих дорог. В соответствии с леммой из всех городов этой группы суммарно исходит не менее  $2^{2n}$  дорог.

Из этих дорог  $\frac{2^n(2^n-1)}{2}$  — это дороги внутри группы, поэтому из первой группы во вторую ведет не менее  $2^{n-1}(2^n + 1)$  дорог. Тогда из  $2^{2n}$  дорог между первой и второй группами в первую направлено не более  $2^{n-1}(2^n - 1)$ . Не более, чем за  $2^{n-1}(2^n - 1)$  дней премьер-министр направит все эти дороги во вторую груп-

пу. И еще не более, чем за  $2 \cdot 2^{n-2}(2^n - n - 1)$  дней он добьется того, чтобы в каждой группе нельзя было выехать из города и в него вернуться. Тогда всего потребуется не более  $2^{n-1}(2^{n+1} - n - 2)$  дней.

Так как  $32 = 2^5$ , то министру потребуется не более  $2^3(2^5 - 5 - 1) = 208$  дней, что меньше 214 дней, оставшихся до 2022 года.

*Комментарий.* Если в стране  $n$  городов, то оценку для числа  $f(n)$  замен можно получить из соотношений  $f(2n) \leq \frac{n(n-1)}{2} + 2f(n)$  (фактически доказано в задаче) и  $f(2n+1) \leq n + f(2n)$  (очевидно). Жюри неизвестно, является ли эта оценка точной.