11 класс, второй день

1. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, наибольший из которых равен сумме двух других. Докажите, что $c > ab$. (*Фольклор*)

Решение. Пусть $x_1 < x_2 < x_3$ — корни многочлена $P(x)$. По условию $x_3 = x_1 + x_2$. Заметим, что $x_1 > 0$ (а значит, все корни положительны), так как иначе $x_3 \leqslant x_2$, что противоречит максимальности корня x_3. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Пользуясь формулами Виета для коэффициентов a, b, c, получаем

$$c - ab = -x_1x_2x_3 + (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) =$$

$$= -x_1x_2(x_1 + x_2) + 2(x_1 + x_2)(x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2) = (x_1 + x_2)(x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)^2) > 0,$$

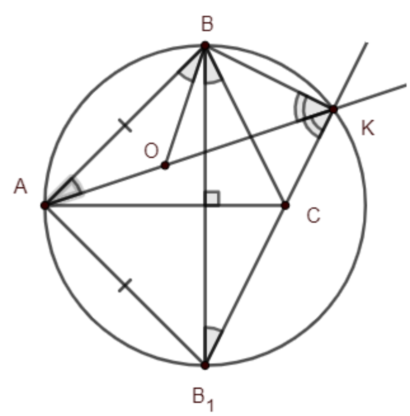
откуда и следует требуемое неравенство.

Второй способ. Заметим, что $-a = x_1 + x_2 + x_3 = 2x_3$. Кроме того,

$$c - ab = P(-a) = P(2x_3) > 0,$$

так как многочлен $P(x)$ положителен при $x > x_3$.

2. В остроугольном треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Точка B_1 симметрична точке B относительно стороны AC. Прямые AO и B_1C пересекаются в точке K. Докажите, что луч KA является биссектрисой угла BKB_1. (*М. А. Евдокимов*)



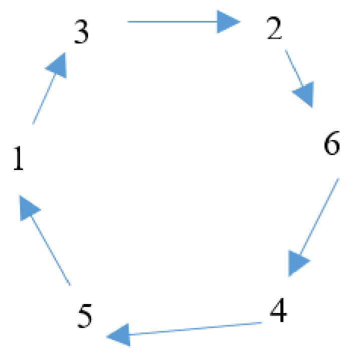
Решение.

Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, следовательно, $\angle AOB = 2\angle C$. Треугольник AOB равнобедренный, поэтому $\angle BAO = \frac{180^\circ - \angle AOB}{2} = 90^\circ - \angle C$. Точки B и B_1 симметричны относительно прямой AC, откуда $\angle BB_1C = 90^\circ - \angle C$. Следовательно, четырёхугольник $ABKB_1$ вписанный (см. рис. 11-2-2). Дуги BA и AB_1 равны в силу симметрии, поэтому $\angle BKA = \angle AKB_1$. Значит, луч KA является биссектрисой угла BKB_1, что и требовалось доказать.

3. Найдите наименьшее натуральное число $N > 9$, которое не делится на 7, но если вместо любой его цифры поставить семёрку, то получится число, которое делится на 7. (*М. А. Евдокимов*)

Решение. Пусть наименьшее такое число имеет вид $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$. Из условия следует, что среди его цифр нет 0 и 7. Если в числе есть цифры 8 или 9, то их можно заменить на 1 или 2 соответственно и получить меньшее число с тем же свойством. Таким образом, искомое число состоит из цифр от 1 до 6.

Рассмотрим a_k и a_{k+1}. По условию числа $\overline{a_1a_2\ldots 7a_{k+1}\ldots a_n}$ и $\overline{a_1a_2\ldots a_k7\ldots a_n}$ делятся на 7, следовательно, их разность также кратна 7, то есть $10a_k \equiv a_{k+1} \pmod 7$ для любого k. Значит, запись числа может быть устроена только следующим образом: за 1 следует 3, за 3 следует 2 (поскольку цифры 9 в числе нет) и так далее (см. рис. 11-2-3).



По условию исходное число, у которого вместо последней цифры стоит 7, делится на 7. Следовательно, исходное число без последней цифры $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}}$ делится на 7. Используя несколько раз сравнение $10a_k \equiv a_{k+1} \pmod 7$, получаем:

$$\overline{a_1a_2\ldots a_{n-1}} = a_1 10^{n-2} + a_2 10^{n-3} + a_3 10^{n-4} + \ldots + a_{n-1} \equiv 10a_1 \cdot 10^{n-3} + a_2 10^{n-3} + a_3 10^{n-4} + \ldots + a_{n-1} \equiv$$

$$\equiv 2a_2 10^{n-3} + a_3 10^{n-4} \ldots + a_{n-1} \equiv \ldots \equiv (n-1)a_{n-1} \pmod 7.$$

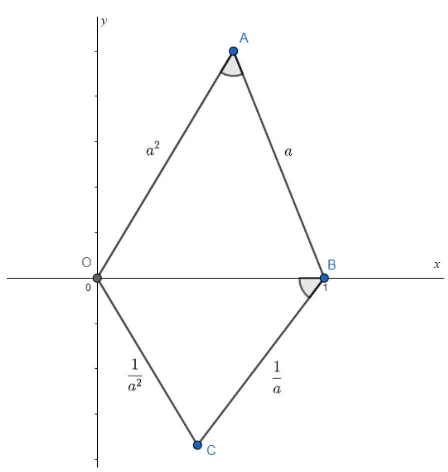
Поскольку a_{n-1} не делится на 7, заключаем, что $n-1$ делится на 7, поэтому наименьшее возможное n равно 8. Таким образом, наименьшее возможное число состоит не менее чем из восьми знаков. Остаётся заметить, что число 13 264 513 удовлетворяет условию задачи, а поскольку оно начинается с 1, то это число и будет наименьшим.

4. Существует ли такой выпуклый четырёхугольник, у которого длины всех сторон и диагоналей в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию? *(О. Н. Косухин)*

Решение. Пусть a — некоторое положительное число. Треугольник со сторонами 1, a и a^2 существует тогда и только тогда, когда выполняются три неравенства:

$$1 < a + a^2, \quad a < 1 + a^2, \quad a^2 < a + 1.$$

Первое из этих неравенств выполнено при $a > \frac{1}{\varphi}$, второе — при всех положительных a, третье — при $a < \varphi$, где $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — так называемое «золотое сечение», положительный корень квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Следовательно, треугольник с такими сторонами существует при $a \in \left(\frac{1}{\varphi}; \varphi\right)$. При таких же a существует треугольник со сторонами 1, $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{a^2}$. Пусть далее значение a принадлежит отрезку $\left[1; \sqrt{\varphi}\right] \subset \left(\frac{1}{\varphi}; \varphi\right)$.



В декартовой системе координат Oxy отметим точки $O(0,0)$, $B(1,0)$, точку A в полуплоскости $y > 0$, для которой $OA = a^2$ и $AB = a$, а также точку C в полуплоскости $y < 0$, для которой $OC = \frac{1}{a^2}$ и $CB = \frac{1}{a}$ (см. рис. 11-2-4). По доказанному выше такие точки существуют для всех $a \in \left[1; \sqrt{\varphi}\right]$.

Кроме того, треугольники OAB и OBC подобны по трём пропорциональным сторонам. Значит, $\angle AOB = \angle BOC$ и $\angle OAB = \angle OBC$. Поскольку $1 \leqslant a \leqslant a^2$, угол AOB, лежащий напротив стороны a треугольника OAB, меньше $90°$. Отсюда получаем, что $\angle AOC = 2\angle AOB < 180°$ и $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = \angle ABO + \angle OAB < 180°$. Следовательно, $OABC$ — выпуклый четырёхугольник при всех указанных значениях a.

Пусть точка A имеет координаты $(x;\ y)$, тогда $x^2+y^2 = a^4$ и $(x-1)^2+y^2 = a^2$. Из этих уравнений получаем $x = \frac{a^4-a^2+1}{2} = f(a)$ и $y = \sqrt{a^4 - f^2(a)}$. Эти выражения непрерывно зависят от a на отрезке $\left[1;\ \sqrt{\varphi}\right]$. Аналогично доказывается, что координаты точки C также непрерывно зависят от a на этом отрезке. Следовательно, длина диагонали AC четырёхугольника $OABC$, равная $g(a)$, также непрерывно зависит от a на этом отрезке.

При $a = 1$ треугольники OAB и OBC являются равносторонними со стороной 1, поэтому $g(1) = \sqrt{3}$. При $a = \sqrt{\varphi}$ получаем $g\left(\sqrt{\varphi}\right) = AC < AB+BC = \sqrt{\varphi}+\frac{1}{\sqrt{\varphi}} = \frac{1+\varphi}{\sqrt{\varphi}} = \left(\sqrt{\varphi}\right)^3$. Значит, непрерывная на отрезке $\left[1;\ \sqrt{\varphi}\right]$ функция $g(a) - a^3$ принимает в концах этого отрезка значения разных знаков: $g(1) - 1^3 = \sqrt{3} - 1 > 0$ и $g\left(\sqrt{\varphi}\right) - \left(\sqrt{\varphi}\right)^3 < 0$. Поэтому найдётся такое значение $a \in \left(1;\ \sqrt{\varphi}\right)$, при котором $g(a) - a^3 = 0$ и, следовательно, $OC = \frac{1}{a^2}$, $CB = \frac{1}{a}$, $OB = 1$, $AB = a$, $OA = a^2$ и $AC = a^3$. Таким образом, искомый четырёхугольник существует.

5. В лаборатории на полке стоят 120 внешне неразличимых пробирок, в 118 из которых находится нейтральное вещество, в одной — яд и в одной — противоядие. Пробирки случайно перемешались, и нужно найти пробирку с ядом и пробирку с противоядием. Для этого можно воспользоваться услугами внешней тестирующей лаборатории, в которую одновременно отправляют несколько смесей жидкостей из любого числа пробирок (по одной капле из пробирки), и для каждой смеси лаборатория сообщит результат: $+1$, если в смеси есть яд и нет противоядия; -1, если в смеси есть противоядие, но нет яда; 0 в остальных случаях. Можно ли, подготовив 19 таких смесей и послав их в лабораторию единой посылкой, по сообщённым результатам гарантированно определить, в какой пробирке яд, а в какой противоядие? (*С. Д. Брагин, Д. В. Галатенко*)

Решение.

Для описания отправляемых в лабораторию смесей составим таблицу, состоящую из 120 строк и 19 столбцов. Каждый столбец таблицы — это описание состава смеси, отправляемой в лабораторию. На пересечении i-ой строки и j-го столбца стоит единица, если j-я смесь содержит жидкость из i-й пробирки, и ноль в противном случае.

Сначала попробуем найти пару пробирок с ядом и противоядием, не устанавливая, где в этой паре яд, а где противоядие. Для этого огрубим результат лаборатории, убрав из него знак (то есть будем считать, что для каждой смеси лаборатория сообщает результат $+1$, если в смеси есть яд без противоядия или противоядие без яда, и ноль иначе). Рассмотрим две строки, соответствующие пробиркам с ядом и противоядием. Их покоординатная сумма, взятая по модулю 2, совпадает со строкой результатов, присланных лабораторией. Следовательно, если все суммы пар строк таблицы, взятые по модулю 2, будут попарно различны, то в результате тестирования мы сможем определить номера строк, соответствующих яду и противоядию.

Такую таблицу можно построить следующим образом. Первую её строку заполним произвольно. Вторую строку заполняем так, чтобы она не совпадала с первой. Третья и все последующие строки должны удовлетворять двум условиям:

- новая строка не должна совпадать с уже заполненными;
- новая строка должна быть такой, чтобы суммы всех возможных пар построенных строк, взятые по модулю 2, были различны.

Покажем, что построение возможно. Покоординатную сумму строк a и b, взятую по модулю 2, будем обозначать как $a \oplus b$. Рассмотрим строчки s_1, s_2, s_3 и s_4. Предположим, что $s_1 \oplus s_2 = s_3 \oplus s_4$, тогда $s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 = s_3 \oplus s_3 \oplus s_4 = s_4$. Следовательно, правила построение таблицы можно переформулировать следующим образом:

- новая строка не должна совпадать с уже заполненными;
- новая строка должна быть такой, чтобы она была отлична от всех возможных сумм троек уже построенных строк.

Число строк длины 19, составленных из нулей и единиц, равно $2^{19} = 2^{10} \cdot 2^9 > 1000 \cdot 500 = 500000$. Запретов, даже после заполнения всех 120 строк, будет не более чем $C_{120}^3 + 120 = \frac{120 \cdot 119 \cdot 118}{6} + 120 < 20 \cdot 120 \cdot 120 + 120 = 288120 < 300000$. Следовательно, такую таблицу можно построить.

Чтобы определить пару пробирок с ядом и противоядием найдём все попарные суммы строк таблицы, взятые по модулю 2. Найдём такие строки s_1 и s_2, что $s_1 \oplus s_2$ совпадает с огрублённым результатом лаборатории. Пробирки, соответствующие строкам s_1 и s_2 содержат яд и противоядие. Далее, рассматривая уже настоящий результат лаборатории, мы сможем точно сказать в какой пробирке яд, а в какой противоядие. Действительно, обязательно найдётся хотя бы одна смесь, содержащая либо только яд, либо только противоядие, иначе строки таблицы, соответствующие пробирке с ядом и пробирке с противоядием, будут одинаковыми, что запрещено построением. Тогда по знаку результата для этой смеси мы сможем определить, был в ней яд или противоядие.