11 класс, первый день

1. На доске записано натуральное число. Если у него стереть последнюю цифру (в разряде единиц), то останется ненулевое число, которое будет делиться на 20, а если первую — то на 21. Какое наименьшее число может быть записано на доске, если его вторая цифра не равна 0? (*М. А. Евдокимов*)
Решение. см. 10.1

2. Существует ли функция f, определённая на отрезке $[-1;1]$, которая при всех действительных x удовлетворяет равенству $2f(\cos x) = f(\sin x) + \sin x$? (*Д. В. Горяшин*)
Решение. Пусть такая функция существует. Тогда, подставляя $\pi - x$ вместо x в данное равенство, получаем

$$2f(-\cos x) = f(\sin x) + \sin x.$$

Следовательно, $f(-\cos x) = f(\cos x)$ при всех x, поэтому $f(-t) = f(t)$ при всех $t \in [-1;1]$, т. е. функция f чётная.

С другой стороны, подставляя в исходное равенство $-x$ вместо x, получим

$$2f(\cos x) = f(-\sin x) - \sin x,$$

а поскольку f чётная, то $f(-\sin x) = f(\sin x)$, поэтому

$$2f(\cos x) = f(\sin x) - \sin x.$$

Вычитая это равенство из исходного, получаем $\sin x = 0$ при всех x. Противоречие.

Комментарий. Отметим, что если равенство имеет вид

$$2f(\cos x) = f(\sin x) + |\sin x|,$$

то удовлетворяющая ему при всех x функция существует, и найти её можно следующим образом. Подставляя $\frac{\pi}{2} - x$ вместо x, получаем

$$2f(\sin x) = f(\cos x) + |\cos x| = \frac{1}{2}\big(f(\sin x) + |\sin x|\big) + |\cos x|,$$

откуда находим

$$f(\sin x) = \frac{1}{3}|\sin x| + \frac{2}{3}|\cos x| = \frac{1}{3}|\sin x| + \frac{2}{3}\sqrt{1-\sin^2 x}.$$

Таким образом, $f(x) = \frac{1}{3}|x| + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}$. Легко убедиться, что эта функция удовлетворяет исходному равенству при всех действительных x.

3. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Окружность ω проходит через точку A, касается прямой BC в точке M и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Точки X и Y — середины отрезков BE и CD соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника MXY касается окружности ω. (*А. В. Доледенок*)
Решение. см. 9.4

4. В некоторой стране есть 100 городов, которые связаны такой сетью дорог, что из любого города в любой другой можно проехать только одним способом без разворотов. Схема сети дорог известна, развилки и перекрестки сети необязательно являются городами, всякая тупиковая ветвь сети обязательно заканчивается городом. Навигатор может измерить длину пути по этой сети между любыми двумя городами. Можно ли за 100 таких измерений гарантированно определить длину всей сети дорог? (*П. А. Бородин*)
Решение. Представим описанную в условии сеть дорог в виде графа, вершинами которого являются города, развилки и перекрестки, а рёбрами — дороги. Покажем, что этот граф является деревом, то есть связным графом без циклов. Связность следует из того, что из любого города можно проехать

в любой другой, а любая развилка или перекресток должны быть соединены с каким-либо городом. Допустим, что в нашем графе есть цикл. Он не содержит двух и более вершин-городов, так как в этому случае, двигаясь в противоположных направления по циклу, мы могли бы получить два различных пути из одного города в другой. Далее, пусть между некоторыми городами A и B существует путь, содержащий какую-то вершину цикла. Он обязательно найдется, так как иначе эта вершина не могла бы быть в нашей сети. Но тогда, добавляя к этому пути «кольцо» вдоль цикла, мы получим еще один путь между A и B. Значит, циклов в нашем графе быть не может и это действительно дерево.

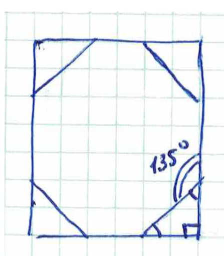
По условию задачи все концевые вершины дерева — города. Назовем эти города концевыми. Назовем также концевой город B следующим за концевым городом A, если по пути из A в B на каждой развилке выбирается самая правая дорога. Выберем какой-нибудь концевой город A_1 и померим расстояние между ним и следующим за ним концевым городом A_2. Потом померим расстояние между A_2 и следующим за ним концевым городом A_3 и так далее. После не более чем 100 таких измерений мы вернемся в исходный город A_1.

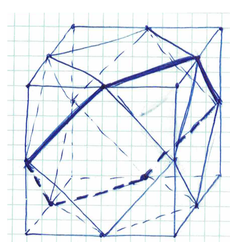
Покажем, что при этом каждая дорога нашей сети будет пройдена ровно два раза в противоположных направлениях. Рассмотрим произвольную дорогу. При удалении из дерева любого ребра оно распадается на две компоненты связности K_1 и K_2, причем каждая из них содержит города. Пусть изначально мы находились в K_1. Поскольку необходимо обойти все города сети, мы должны пройти по этой дороге два раза: первый раз, когда движемся из K_1 в K_2, и второй, когда возвращаемся обратно. Процедура обхода устроена таким образом, что мы посетим все вершины компоненты K_2 до того, как покинем её, поэтому больше проходить по дороге из K_1 в K_2 не потребуется.

Наконец, сложив измеренные величины и разделив сумму пополам, мы получим длину всей сети.

5. Многогранник с вершинами в серединах рёбер некоторого куба называется кубооктаэдром. В сечении кубооктаэдра плоскостью получился правильный многоугольник. Какое наибольшее число сторон он может иметь? (*М. А. Евдокимов*)

Решение.





Пусть ребро исходного куба, из которого получился кубооктаэдр, равно 1. Рассмотрим сечения кубооктаэдра плоскостью, параллельной основанию куба, на расстоянии $0 < h < \frac{1}{2}$ от основания. В сечении будут получаться восьмиугольники, все углы которых равны $135°$. Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть точки пересечения плоскости сечения с рёбрами куба (см. рис.). Найдём значение h, при котором соседние стороны получающегося в сечении восьмиугольника равны, тогда он окажется правильным. Длина x стороны, которая лежит в грани куба, находится из пропорции $\frac{x}{1} = \frac{h}{1/2} = 2h$. Другая сторона — это гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника, длина которой равна $\frac{\sqrt{2}}{2} - h\sqrt{2}$. Поэтому достаточно потребовать, чтобы выполнялось равенство $2h = \frac{\sqrt{2}}{2} - h\sqrt{2}$, т. е. $h = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} < \frac{1}{2}$. Итак, правильный восьмиугольник в сечении получиться может.

Предположим, что в сечении кубооктаэдра некоторой плоскостью α получился правильный n-угольник и $n > 8$. Тогда вершины этого n-угольника должны лежать на рёбрах кубооктаэдра, причём одному ребру не может принадлежать более двух вершин n-угольника. Рассмотрим сечение исходного куба, которое является правильным шестиугольником (см. рис.), а также сечения, которые получаются из данного поворотом на 90°, 180° и 270° относительно вертикальной оси куба. Заметим, что объединение сторон этих четырёх правильных шестиугольников есть объединение всех рёбер кубооктаэдра. Покажем, что на сторонах какого-то из четырёх выбранных правильных шестиугольников лежит хотя бы 3 вершины n-угольника. Действительно, если на сторонах каждого такого шестиугольника лежит не более двух вершин, то всего вершин будет не более восьми. Следовательно, плоскость сечения n-угольника совпадает с плоскостью этого шестиугольника и в сечении кубооктаэдра получается шестиугольник. Получаем противоречие.

6. Верхней целой частью числа x называют наименьшее целое число, большее или равное x. Существует ли такое число A, что для любого натурального n расстояние от верхней целой части A^n до ближайшего квадрата натурального числа всегда равно 2? (*Д. М. Креков*)

Решение. см. 10.6