XIII ЗАОЧНАЯ ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ. ОСНОВНОЙ ТУР.

17 ФЕВРАЛЯ – 23 МАРТА 2020 Г.

Правила

1. Участие в основном туре

Дорогие участники олимпиады, родители и учителя. В целях популяризации математики и, в особенности, теории вероятностей и статистики — разделов математики, наиболее близких к жизни — мы уже с 2008 г. проводим эту заочную олимпиаду. Основной тур содержит 19 заданий, из которых 3 задания – эссе (небольшое сочинение на заданную тему) и 16 заданий – это задачи, требующие полного решения.

Участвовать в основном туре может любой школьник, студент ССУЗа, колледжа, лицея и так далее, независимо от участия, неучастия или результатов пригласительного тура.

ВНИМАНИЕ!

Каждую задачу мы рекомендуем участникам, начиная с некоторого класса. Это указание – ориентир для участников; оно не является ограничением.

Любой участник может выполнять любое задание независимо от рекомендаций. Баллы начисляются в соответствии с критериями независимо от класса. Разница в возрасте учитывается при награждении и определении призеров и победителей.

2. Рассылка материалов

Все участники самостоятельно получают анкету, задания и настоящие правила на странице основного тура http://ptlab.mccme.ru/node/1702.

3. Выполнение работы

В ходе раздумий над заданиями Вы можете пользоваться любыми источниками (справочниками, учебниками, интернетом, получать консультации от учителя, от нас) по поводу теории вероятностей и статистики. Большую помощь может оказать изучение решений задач прошлых лет (см. архив на странице основного тура), посещение дистанционного кружка по теории вероятностей (http://ptlab.mccme.ru/node/1483). Неэтичным и попросту недопустимым является лишь прямое списывание или выполнение заданий за участника кем-то другим. Для консультаций с нами используйте, пожалуйста, форум «Консультация» на нашем сайте http://ptlab.mccme.ru. У Вас больше месяца. Пожалуйста, не откладывайте все на последний день, но и не спешите.

3. Отсылка решений, проверка и оценивание

Свои решения и заполненную анкету участника Вы должны отправить в любом текстовом или графическом формате (doc, docx, pdf, jpg и т. п.) на электронный адрес teorver.olympiads@gmail.com до истечения суток 23 марта 2020 года по московскому времени. Ответы и решения, высланные 24 марта или позже, не принимаются. Ваши решения проверит оргкомитет.

Решения задач будут опубликованы на странице основного тура 25 марта. Лучшие эссе будут опубликованы чуть позже по мере проверки.

4. Определение призеров и победителей, награждение

При проверке задания оцениваются разным числом баллов, в зависимости от их сложности (максимальный балл за задачу указан в условии). Единственное требование, предъявляемое к решению задачи – решение должно быть верным.

Отдельно происходит определение призеров и победителей в 6–7 классах (и младше при наличии), отдельно в 8–9 классах и отдельно – в 10–11. Отдельно производится оценка эссе и награждение авторов лучших эссе (независимо от возраста).

Критерии награждения оргкомитет публикует после олимпиады, исходя из ее результатов. Претензии по критериям награждения не принимаются.

Победители и призеры получают дипломы и грамоты. Порядок и регламент награждения будет определен оргкомитетом, и вся необходимая информация будет размещена на странице олимпиады.

5. Апелляция

Апелляция по основному туру **проводится по электронной почте с 30 марта по 5 апреля** включительно. Форма апелляции будет размещена на странице основного тура. **Оргкомитет прекратит переписку по поводу апелляций после 5 апреля**, независимо от того, все ли вопросы выяснены. При наличии разногласий просим уложиться в срок.

Искренне желаем удачи

Отдельное замечание

Мы редко сталкиваемся со случаями списывания и другими недобросовестными попытками искажения результатов. Но все же бывает. Если у оргкомитета возникают сомнения в самостоятельности выполнения работы, оргкомитет вправе дисквалифицировать работу без дополнительных согласований.

Эссе

Эссе – это сочинение небольшого объема на заданную тему. В отличие от задач, эссе не подразумевает точных решений, ответов или методов, но должно быть продуманным, аргументированным, подробным.

Вы можете выбрать любое эссе, или два, или даже все три. Эссе оцениваются отдельно, и баллы за эссе не суммируются и не прибавляются к баллам, полученным за решение задач. За лучшие эссе участники награждаются отдельными дипломами.

1. Мартингейл. Давным-давно известен способ, который, якобы, позволяет гарантированно не проиграть, играя в рулетку или в орлянку. Эта стратегия называется *мартингейл*. Одна из версий происхождения названия состоит в том, что в провансальском диалекте французского языка фраза «*jouga a la martegalo*» означала «играть неумело, по-дилетантски, по-дурацки».

Простейший мартингейл состоит в удвоении ставок. Если игрок А. (за которого мы болеем) и игрок Б. вначале ставят по одной монете, и А. проигрывает, то в следующий раз он должен поставить две монеты. Если он выиграет, то отыграет свою монету и получит ещё одну. Если А. вновь проиграет, то проигрыш составит уже три монеты, и в следующий раз А. должен поставить четыре монеты. В случае выигрыша он отыграет предыдущие три и получит ещё одну монету сверх того. И так далее: при каждом проигрыше игрок А. должен удваивать предыдущую ставку. Рано или поздно он выиграет очередной кон и, тем самым, не только отыграется, но даже останется в выигрыше, получив одну монету чистого дохода.

Проанализируйте мартингейл как стратегию. Правда ли эта стратегия неуязвима? Можно ли придумать похожую стратегию для лотерей? И – главный вопрос – почему, зная такую замечательную стратегию, игроки всё равно разоряются? Напишите небольшое эссе (2 — 3 страницы) на эту тему.

2. Экспертиза. Гражданин В. приобрел 80 одинаковых видеокарт в компании, занимающейся продажами компьютерных комплектующих. Через некоторое время он предъявил претензию и потребовал обратно деньги за 19 видеокарт, заявив, что они неисправны по вине производителя. Компания отказалась возвращать деньги, и г-н В. подал в суд.

В ходе подготовки к судебному слушанию гарантийный отдел компании выяснил два обстоятельства.

1. По официальному заключению производителя в среднем 1,85% видеокарт этой модели имеют производственный дефект (выборка из более чем 1 млн проданных в течение 5 лет видеокарт).

2. Г-н В. приобретал видеокарты в разное время, и они были из разных партий (это следует из товарных чеков и накладных).

На этом основании технический эксперт компании посчитал, что выборка из 80 приобретённых г-ном В. видеокарт является репрезентативной и что вероятность производственного дефекта одной случайно выбранной видеокарты близка к 0,0185. Исходя из этих предположений, эксперт нашёл вероятность события «19 видеокарт из 80 имеют производственный дефект»:

$$C_{80}^{19} \cdot 0{,}0185^{19} \cdot 0{,}9815^{61} < 4{,}43 \cdot 10^{-16}.$$

В своём заключении эксперт написал, что вероятность этого события меньше, чем любой разумный уровень значимости[1], а поэтому гипотезу «19 из 80 приобретенных видеокарт имеют дефект производственного характера» следует отвергнуть. В качестве альтернативной следует принять гипотезу «19 карт повреждены из-за нарушения условий эксплуатации или в результате использования в составе устройств, несовместимых с данными видеокартами по техническим характеристикам».

Вооружившись этим экспертным заключением, руководство компании пошло в суд, но проиграло дело, поскольку адвокат истца сумел убедить суд, что проведённая экспертиза некачественная и что сделанная оценка вероятности не дает оснований отвергнуть гипотезу о производственном дефекте видеокарт, купленных г-ном В.

Представьте себе, что суд назначил новую экспертизу и что она поручена вам. Проведите собственную вероятностную экспертизу и в небольшом эссе (2 — 3 страницы) ответьте на следующие вопросы.

1. Прав ли адвокат г-на В. в том, что первая экспертиза была некачественной?

2. Следует ли, тем не менее, отвергнуть гипотезу о производственном дефекте карт на основании вашей качественной экспертизы (на уровне значимости 0,001)?

[1] Уровень значимости при проверке гипотез – решающая вероятность. Если наступило одно из двух взаимно противоположных событий, вероятность которого, при условии, что гипотеза верна, меньше, чем уровень значимости, то такую гипотезу следует отвергнуть как неправдоподобную. В противном случае гипотезу не отвергают (но и не считают доказанной). Обычно в качестве уровня значимости берут значения 0,05, 0,01, 0,005 и т.п.

3. Население города. Часто думают, что статистики делают странные и неоправданные оценки. Например, на 1 января 2019 года численность населения Москвы по данным Росстата составляла 12 615 279 человек. Мы понимаем, что это значение не может быть точным: каждую минуту из Москвы кто-то уезжает, кто-то, напротив, становится москвичом. Люди рождаются и умирают. Не лучше ли было просто сказать, что население Москвы – около 12,6 млн?

Нет, не лучше. Ведь статистики оценивают величины не наобум, а применяют статистические методы, прошедшие проверку временем. Оценку нельзя отрывать от метода, которым она сделана. Если нет метода, то оценка – не оценка и даже не прикидка, а просто взятое с потолка число. Если же метод есть, и согласно ему получается некоторое значение, то именно оно и должно быть в отчёте. Было бы странно, если бы статистик получил одно число, а в отчёт написал другое. Округлить каждый может так, как считает нужным. Это уже не дело статистики.

Например, оценивая население Москвы некоторым методом (перепись населения 2010 г. плюс учёт миграции с поправками), специалисты Росстата получили 12 615 279 человек. Именно это они и написали в своём отчёте.

Такая числовая оценка называется *точечной*[2]. Ей удобно пользоваться, но при этом нужно понимать, что вряд ли она очень точная. Поэтому часто делают интервальную оценку[3].

На рис. 1 изображён план некоторого города, расположенного в европейской части России. На плане видны парковые и лесные массивы, водоёмы, жилые кварталы и промышленные зоны. Указана граница города, но план немой – ни одного названия нет.

Есть ли способ оценить число жителей этого города? Можно попробовать сделать точечную оценку. Может быть, вы сумеете придумать, как оценить численность населения снизу и сверху. Тогда получится интервальная оценка. Может быть, вы предложите что-то ещё.

Напишите небольшое эссе (2 — 3 страницы), где опишите свой метод, покажите, как он работает на данном плане, и ответьте на главный вопрос – сколько жителей в этом замечательном городе?

---

[2] Точечная оценка – число, приблизительно равное истинному значению оцениваемой величины. Труднее всего объяснить, что такое приблизительное равенство. В случае с численностью населения города можно считать, что точечная оценка хорошая, если погрешность мала по сравнению с истинной численностью (меньше наперёд выбранного значения, скажем, меньше, чем 5%).

[3] Интервальная оценка – интервал, в который с большой вероятностью попадает истинное значение оцениваемой величины.

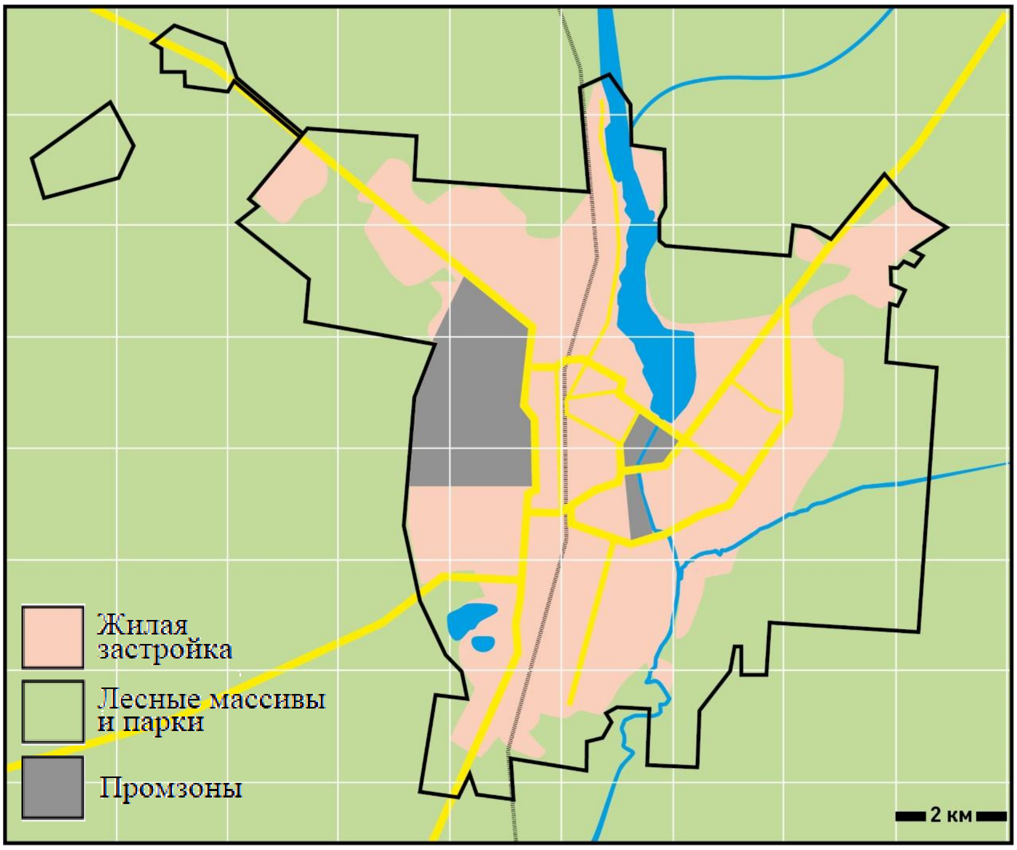


Рис. 1. План города

Задачи

Каждая задача требует полного и развёрнутого решения. Около каждой задачи указан класс и наибольший балл. Класс указан только для того, чтобы было легче ориентироваться: чем старше класс, тем больше знаний требует задача. Чем выше максимальный балл, тем задача труднее. Вы можете решать любые задачи, независимо от класса, в котором учитесь. Разница в возрасте учитывается только при подведении итогов: победители и призёры определяются отдельно среди участников из 6 – 7 классов, отдельно – среди участников из 8 – 9 классов, и отдельно – среди тех, кто учится в 10 – 11 классах.

За каждую задачу при проверке выставляется полный или неполный балл в зависимости от продвижений в решении. Баллы за решённые задачи складываются.

4. Диаграмма «стебель-листья». (От 6 класса, 2 балла). Для представления целых чисел или десятичных дробей часто используется специальный вид диаграмм «стебель-листья»[4]. На таких диаграммах удобно изображать возраст людей. Предположим, что в изучаемой группе 5 человек, которым 19, 34, 37, 42 и 48 лет. Для этой группы диаграмма будет выглядеть, как показано на рис. 2. Левый столбец – «стебель», а вправо от него идут «листья».

0	
1	9
2	
3	4 7
4	2 8

Рис.2.

Изучая некоторую группу пациентов, 1 декабря врач составил диаграмму их возрастов (рис. 3 а). На рис. 3 б) показана новая диаграмма их возрастов, которая была составлена также 1 декабря по прошествии нескольких лет. За эти годы состав группы остался прежним – в ней остались все, кто был, и никто новый в эту группу не вошёл. Но цифр на новой диаграмме не видно – вместо них звёздочки. Определите, сколько лет прошло, и восстановите диаграмму.

0	
1	0 0 1 2 2 3
2	1 5 6
3	0 2 4 6
4	1 6

Рис. 3 а)

*	
*	* * * * * *
*	*
*	* * * *
*	* * *
*	*

Рис. 3 б)

[4] Английское название – Stem-and-Leaf plot.

5. Наименьший набор. (От 6 класса, 2 балла) В числовом наборе медиана равна 3, среднее арифметическое равно 5, а единственная мода[5] набора равна 6. Какое наименьшее количество чисел может быть в наборе, обладающем указанными свойствами?

6. Медиана суммы числовых наборов. Пусть даны два числовых набора:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \text{ и } Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}.$$

В первом n чисел, во втором – m чисел. *Прямой суммой* или просто *суммой* $X \oplus Y$ этих наборов назовём набор, состоящий из всевозможных сумм $x_k + y_j$. Всего в наборе $X \oplus Y$ ровно mn чисел. Сумму наборов удобно представить таблицей. На рис. 4 показана сумма наборов $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{0, 4, 5\}$. Если записать эту сумму в строчку и заодно упорядочить по возрастанию, получится

$$X \oplus Y = \{1, 2, 3, 5, 6, 6, 7, 7, 8\}.$$

$Y \backslash X$	1	$\boxed{2}$	3
0	1	2	3
$\boxed{4}$	5	$\boxed{6}$	7
5	6	7	8

Сумма наборов

Рис. 4.

Рассмотрим медианы данных наборов и медиану их суммы. Медиана первого набора $M_x = 2$, медиана второго равна $M_Y = 4$, а медиана их суммы равна $M_{X \oplus Y} = 6$ (на рисунке все три медианы выделены). Получилось равенство $M_{X \oplus Y} = M_X + M_Y$. Всегда ли медиана суммы равна сумме медиан?

а) **(От 6-го класса, 1 балл)** Приведите какой-нибудь пример двух числовых наборов, у которых медиана их суммы отличается от суммы их медиан на 1.

б) **(От 6-го класса, 3 балла)** Однажды Рассеянный Учёный изучал два таинственных числовых набора. Про первый набор ничего не известно вообще, а про второй известно, что его наименьшее значение равно 1, а наибольшее равно 5. Несмотря на скудость этих данных, Учёный путем сложных вычислений нашёл, что медиана суммы этих двух наборов больше суммы их медиан на 4,5. Может ли такое быть? Приведите пример таких двух наборов или докажите, что их не существует.

7. Пасхальная задача[6]. (От 6 класса, 2 балла) Двое играют в «пасхальный бой яиц». Перед ними большая корзина с яйцами. Они наугад берут по яйцу и ударяют их друг о друга. Одно из яиц разбивается, побеждённый берёт новое

[5] Модой называется число, которое встречается в наборе больше раз, чем любое другое.

[6] Считается, что эту задачу придумал академик Андрей Дмитриевич Сахаров. И. Ф. Гинзбург. Академик А.Д.Сахаров. Научные труды. Сборник. – М.: АОЗТ «Издательство ЦентрКом», 1995.

яйцо, а победитель сохраняет своё яйцо для следующего раунда (исход каждого раунда зависит только от того, у какого яйца скорлупа прочнее; победившее яйцо сохраняет свою прочность). Известно, что первый игрок победил в первых десяти раундах. Какова вероятность того, что он же победит и в следующем раунде?

8. Кресла. (От 7 класса, 1 балл) В мебельный магазин завезли партию офисных кресел. Кресла были одинаковые во всём, кроме цветов: 15 кресел были чёрными и 18 — коричневыми. Кресла пользовались спросом и раскупались в случайном порядке. В какой-то момент покупатель на сайте магазина обнаружил, что в продаже осталось только два кресла. Какова вероятность того, что эти два кресла одного цвета?

9. Карточный жребий. Тридцать шесть игроков играют в игру: из колоды, в которой игральных 36 карт, игроки по очереди выбирают по случайной карте. Если игроку попался туз бубен, то игрок выиграл; если же попалась другая карта, игрок возвращает её в колоду, и случайную карту тянет следующий игрок. Так они тянут карты по кругу: сначала первый, затем второй и т.д. Если на первом круге никому не попался туз бубен, игроки в том же порядке тянут карты по второму кругу. Это продолжается до тех пор, пока кто-то из них не вытянет туза бубен.

а) **(От 7 класса, 2 балла)** Честная ли это игра, то есть равны ли у игроков вероятности выигрыша?
б) **(От 9 класса, 2 балла)** Найдите хотя бы приближённо вероятность выигрыша первого игрока.

10. Лотерея. (От 7 класса, 3 балла) Случилось так, что у Рассеянного Учёного осталось только 20 рублей, а ему нужно купить билет на автобус, чтобы ехать домой. Билет стоит 45 р. Рядом с автобусной остановкой продаются билеты моментальной лотереи как раз по 10 р. за штуку. С вероятностью $p = 0{,}1$ билет содержит выигрыш 30 р., а других выигрышей нет. Учёный решил рискнуть, поскольку терять ему нечего. Найдите вероятность того, что Рассеянный Учёный сумеет выиграть достаточно денег, чтобы купить билет на автобус.

11. Две задачи коллекционера. Производитель шоколадных яиц с игрушкой внутри объявил, что выпускается новая коллекция «Нильская семейка», в которой десять разных обаятельных крокодилов. Крокодилы равномерно и случайно распределены по шоколадным яйцам, то есть в случайно выбранном яйце каждый из крокодилов может оказаться с вероятностью 0,1.

Близнецы Лёша и Гоша захотели собрать две коллекции – по одной на брата. Каждый день мама покупает им по одному яйцу. Наступил момент, когда первая коллекция была, наконец, собрана.

Обозначим p_k вероятность того, что к моменту завершения первой коллекции во второй коллекции недостаёт ровно k крокодилов.

а) **(От 7 класса, 3 балла)** Докажите, что $p_1 = p_2$.

б) **(От 8 класса, 4 балла)** Докажите, что: $p_2 > p_3 > p_4 > \ldots > p_{10}$.

12. Автобусы. (От 8 класса, 2 балла) На остановке около дома Рассеянного Учёного останавливаются автобусы двух маршрутов: № 152 и № 251. Оба они идут к станции метро. Интервал между автобусами № 152 ровно 5 минут, а интервал между автобусами 251-го маршрута ровно 7 минут. Интервалы строго соблюдаются, но между собой эти два маршрута не согласованы и их расписания не зависят друг от друга. В совершенно случайный момент времени Рассеянный Учёный приходит на остановку и садится в первый же подошедший автобус, чтобы доехать до метро. Какова вероятность того, что Учёный сядет в автобус № 251?

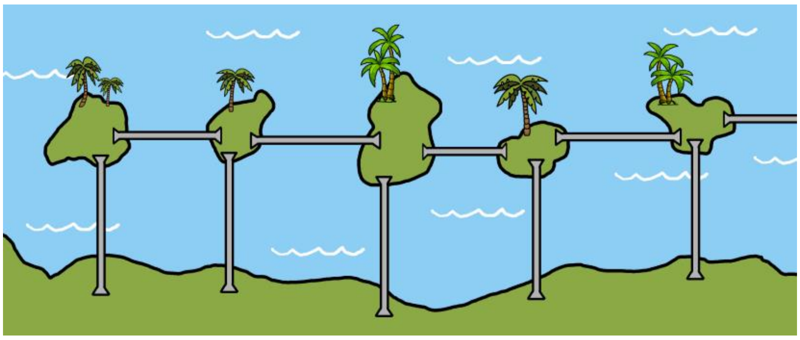
13. Шеренга. (От 8 класса, 3 балла) Случайным образом в шеренгу становятся 20 воспитанников детского сада, из них 11 девочек и 9 мальчиков. Найдите вероятность того, что между первым и последним мальчиками окажется не больше пяти девочек.

14. Несимметричная монета. (От 9 класса, 2 балла) У Билли Бонса есть две монеты — золотая и серебряная. Одна из них симметричная, а другая — нет. Неизвестно, какая именно монета несимметрична, но известно, что несимметричная монета выпадает орлом с вероятностью $p = 0,6$.

Билли Бонс бросил золотую монету, и сразу выпал орёл. Тогда Билли Бонс стал бросать серебряную монету, и орёл выпал только со второго броска. Найдите вероятность того, что несимметричной является золотая монета.

15. Три ладьи. (От 9 класса, 2 балла) На три случайных поля шахматной доски поставили три ладьи. Найдите математическое ожидание числа полей на доске, которые находятся под боем хотя бы одной ладьи. Считается, что если ладья стоит на каком-то поле, то она сама это поле не бьёт, но другая ладья может его бить.

16. Мосты. (От 9 класса, 3 балла) Вдоль южного берега бескрайнего моря цепочкой раскинулся архипелаг из бесконечного количества островов. Острова соединены бесконечной цепочкой мостов, и каждый остров соединён мостом с берегом. В случае сильного землетрясения каждый мост независимо от других с вероятностью $p = 0,5$ разрушается. Какова вероятность того, что после сильного землетрясения с первого острова можно будет перебраться по сохранившимся мостам на берег?



17. Максимальные группы. (От 9 класса, 4 балла) Имитировать случайные процессы человеку трудно. Даже серию бросаний монеты придумать «из головы» почти невозможно. Одна из причин в том, что в длинной серии человек подсознательно старается не допустить «слишком много» орлов или решек подряд. В действительно случайной серии, как правило, встречаются довольно длинные группы, состоящие только из орлов или только из решек. Например, при 100 бросаниях монеты, скорее всего (с вероятностью около 0,54), встретятся 7 орлов или 7 решек подряд, а математическое ожидание наибольшей длины такой группы равно приблизительно 6,98.

Если монета k раз подряд выпала одной и той же стороной вверх, будем называть такую подпоследовательность *группой* длины k.

Например, в последовательности ОРРРООРР четыре группы, длины которых равны 1, 3, 2 и 2.

Обозначим $p_{n,\,k}$ вероятность того, что в серии из n бросаний симметричной монеты содержится группа длины k или больше. Выведите рекуррентную формулу

$$p_{n,\,k} = p_{n-1,\,k} - \frac{1}{2^k}\, p_{n-k,\,k} + \frac{1}{2^k}.$$

18. Убывающая плотность. (От 10 класса, 3 балла) Непрерывная случайная величина X имеет функцию плотности $y = f(x)$, которая равна нулю при $x < a$ и при $x \geq b$, а на промежутке $[a; b)$ непрерывна, положительна и монотонно убывает. Докажите, что математическое ожидание случайной величины X больше, чем её медиана[7].

19. Сколько самолётов? (От 11 класса, 8 баллов) Работа Рассеянного Учёного связана с длительными командировками, и поэтому он часто летает самолётами одной и той же авиакомпании. У этой авиакомпании много одинаковых самолётов, и все они имеют имена. Поскольку Учёный летает не каждый день и даже не каждую неделю, можно считать, что всякий раз ему «достаётся» случайный самолёт. Из любопытства и по привычке Рассеянный Учёный каждый раз записывает, на каком самолёте он летит. В своём пятнадцатом полёте Учёный оказался на борту самолёта, гордо носящего имя «Симеон Дени Пуассон». После взлёта Учёный достал свою книжечку, чтобы записать имя самолёта, и обнаружил, что на «Пуассоне» он уже один раз летел, а прежде повторений не было. Оцените количество самолётов в авиакомпании.

[7] Медианой случайной величины X называется такое число m, что $\mathrm{P}(X \leq m) \geq 0{,}5$ и $\mathrm{P}(X \geq m) \geq 0{,}5$. Если случайная величина имеет конечную функцию плотности $y = f(x)$, то прямая $x = m$ делит фигуру, ограниченную осью абсцисс и графиком плотности, на две фигуры, площадь каждой из которых равна 0,5.