XIII ЗАОЧНАЯ ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКЕ. ОСНОВНОЙ ТУР.

17 ФЕВРАЛЯ – 23 МАРТА 2020 Г.

Решения задач

4. Диаграмма «стебель- листья». (От 6 класса, 2 балла). Для представления целых чисел или десятичных дробей часто используется специальный вид диаграмм «стебель-листья»[1]. На таких диаграммах удобно изображать возраст людей. Предположим, что в изучаемой группе 5 человек, которым 19, 34, 37, 42 и 48 лет. Для этой группы диаграмма будет выглядеть, как показано на рис. 2. Левый столбец – «стебель», а вправо от него идут «листья».

0	
1	9
2	
3	4 7
4	2 8

Рис.2.

Изучая некоторую группу пациентов, 1 декабря врач составил диаграмму их возрастов (рис. 3 а). На рис. 3 б) показана новая диаграмма их возрастов, которая была составлена также 1 декабря по прошествии нескольких лет. За эти годы состав группы остался прежним – в ней остались все, кто был, и никто новый в эту группу не вошёл. Но цифр на новой диаграмме не видно – вместо них звёздочки. Определите, сколько лет прошло, и восстановите диаграмму.

0	
1	0 0 1 2 2 3
2	1 5 6
3	0 2 4 6
4	1 6

Рис. 3 а)

*	
*	* * * * * *
*	*
*	* * * *
*	* * *
*	*

Рис. 3 б)

Решение. Цифры от 0 до 5, означающие десятки лет, можно поставить сразу (рис. 4 а). Ясно, что прошло меньше 10 лет, иначе в строке «1» не было бы цифр вовсе.

Если бы прошло 7 лет или больше, то тот, кому 13 лет, перешёл бы в строку «2», и в строке «1» осталось бы меньше шести значений. Но этого не произошло, значит, прошло меньше чем 7 лет.

В строку «2» никто из строки «1» не перешёл, а из строки «2» в строку «3» перешли двое: те, кому было 25 и 26 лет. Но в строке «3» количество значений не изменилось, значит, те, кому было 34 и 36 лет, перешли в строку «4». Следовательно, прошло не меньше чем 6 лет.

Таким образом, прошло ровно 6 лет, и получилась диаграмма, которая показана на рис. 4 б).

[1] Английское название – Stem-and-Leaf plot.

0	
1	0 0 1 2 2 3
2	1 5 6
3	0 2 4 6
4	1 6
5	

Рис. 4 а)

0	
1	6 6 7 8 8 9
2	7
3	6 8 1 2
4	7 0 2
5	2

Рис. 4 б)

Ответ: 6 лет, см. рис. 4 б).

5. Наименьший набор. (От 6 класса, 2 балла) В числовом наборе медиана равна 3, среднее арифметическое равно 5, а единственная мода[2] набора равна 6. Какое наименьшее количество чисел может быть в наборе, обладающем указанными свойствами?

Решение. Ясно, что в наборе хотя бы два раза встречается число 6, и кроме того, есть ещё, по крайней мере, два числа.

Если в наборе ровно четыре числа $a, b, 6, 6$, то можно считать, что $a \le b \le 3$ и, кроме того, сумма всех чисел равна 20, поэтому $a + b = 20 - 6 - 6 = 8$. Противоречие. В наборе не может быть ровно четыре числа.

Если в наборе ровно пять чисел, то набор имеет вид $a, b, 3, 6, 6$, при этом $a \le b \le 3$ и $a + b = 25 - 6 - 6 - 3 = 10$. Противоречие. Набор не может состоять ровно из пяти чисел.

Набор из шести чисел с указанными свойствами существует. Например, $-2, -1, 0, 6, 6, 21$.

Ответ: 6.

6. Медиана суммы числовых наборов. Пусть даны два числовых набора:

$$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \text{ и } Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}.$$

В первом n чисел, во втором – m чисел. *Прямой суммой* или просто *суммой* $X \oplus Y$ этих наборов назовём набор, состоящий из всевозможных сумм $x_k + y_j$. Всего в наборе $X \oplus Y$ ровно mn чисел. Сумму наборов удобно представить таблицей. На рис. 5 показана сумма наборов $X = \{1, 2, 3\}$ и $Y = \{0, 4, 5\}$. Если записать эту сумму в строчку и заодно упорядочить по возрастанию, получится $X \oplus Y = \{1, 2, 3, 5, 6, 6, 7, 7, 8\}$.

Y \ X	1	$\boxed{2}$	3
0	1	2	3
$\boxed{4}$	5	$\boxed{6}$	7
5	6	7	8

Сумма наборов

Рис. 5

Рассмотрим медианы данных наборов и медиану их суммы. Медиана первого набора равна $M_x = 2$, медиана второго $M_Y = 4$, а медиана их суммы равна $M_{X \oplus Y} = 6$ (на рисунке все три медианы выделены). Получилось равенство $M_{X \oplus Y} = M_X + M_Y$. Всегда ли медиана суммы равна сумме медиан?

[2] Модой называется число, которое встречается в наборе больше раз, чем любое другое.

а) **(От 6-го класса, 1 балл)** Приведите какой-нибудь пример двух числовых наборов, у которых медиана их суммы отличается от суммы их медиан на 1.
б) **(От 6-го класса, 3 балла)** Однажды Рассеянный Учёный изучал два таинственных числовых набора. Про первый набор ничего не известно вообще, а про второй известно, что его наименьшее значение равно 1, а наибольшее равно 5. Несмотря на скудость этих данных, Учёный путем сложных вычислений нашёл, что медиана суммы этих двух наборов больше суммы их медиан на 4,5. Может ли такое быть? Приведите пример таких двух наборов или докажите, что их не существует.

Решение. а) Например, два одинаковых набора: $X = \{0, 0, 1\}$ и $Y = \{0, 0, 1\}$. Медиана каждого равна 0, а сумма этих наборов $\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2\}$ имеет медиану 1.
б) Покажем, что таких наборов не существует. Пусть первый набор X состоит из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а второй набор Y состоит из чисел $y_1, y_2, ..., y_m$.

Сумма этих наборов $X \oplus Y$ состоит из всевозможных сумм $x_k + y_j$. Заменим в каждой такой сумме слагаемое y_j наибольшим значением 5. Получится набор, в котором m раз встречается число $x_1 + 5$, m раз встречается число $x_2 + 5$ и так далее.

Медиана полученного набора равна $M_X + 5$. Это число не меньше, чем медиана суммы $X \oplus Y$, поскольку, заменяя в суммах $x_k + y_j$ все числа y_j числом 5, мы тем самым не уменьшили каждое число (некоторые увеличили), а значит, медиана тоже не уменьшилась. То есть

$$M_{X \oplus Y} \le M_X + 5.$$

С другой стороны, наименьшее значение набора Y равно 1, поэтому медиана этого набора не меньше, чем 1: $M_Y \ge 1$. Следовательно,

$$M_X + M_Y \ge M_X + 1.$$

Из двух полученных неравенств следует, что

$$M_{X \oplus Y} - \left(M_X + M_Y\right) \le M_X + 5 - \left(M_X + 1\right) = 4.$$

Разность не больше 4 и, значит, не может равняться 4,5. Таких наборов не существует. Рассеянный Учёный где-то ошибся в своих расчётах.

Ответ: а) например, два одинаковых набора $\{0, 0, 1\}$ и $\{0, 0, 1\}$; б) такого быть не может.

Примечание. Можно показать в общем виде, что для любых двух наборов X и Y число $\left|M_{X \oplus Y} - \left(M_X + M_Y\right)\right|$ не превосходит наименьшего из размахов наборов X и Y.

7. Пасхальная задача[3]**. (От 6 класса, 2 балла)** Двое играют в «пасхальный бой яиц». Перед ними большая корзина с яйцами. Они наугад берут по яйцу и ударяют их друг о друга. Одно из яиц разбивается, побеждённый берёт новое яйцо, а победитель сохраняет своё яйцо для следующего раунда (исход каждого раунда зависит только от того, у какого яйца скорлупа прочнее; победившее яйцо сохраняет свою прочность). Известно, что первый игрок победил в первых десяти раундах. Какова вероятность того, что он же победит и в следующем раунде?

Решение. Независимо от того, как складывались события в первых десяти раундах, в 10-м раунде победителем выйдет яйцо, которое самое прочное среди 11 первых случайно извлеченных из корзины яиц. Значит, это самое прочное яйцо разобьётся в 11-м раунде, только если 12-е извлечённое яйцо окажется прочнее, то есть оно окажется прочнее предыдущих 11 яиц. Вероятность этого равна $1/12$. Значит, вероятность противоположного события «победитель десяти раундов победит и в одиннадцатом раунде» имеет вероятность $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$.

Ответ: $11/12$.

8. Кресла. (От 7 класса, 1 балл) В мебельный магазин завезли партию офисных кресел. Кресла были одинаковые во всём, кроме цветов: 15 кресел были чёрными и 18 — коричневыми. Кресла пользовались спросом и раскупались в случайном порядке. В какой-то момент покупатель на сайте магазина обнаружил, что в продаже осталось только два кресла. Какова вероятность того, что эти два кресла одного цвета?

Решение. Можно считать, что остались два случайных кресла. Построим дерево эксперимента (рис.6). Событие A «оставшиеся кресла одного цвета» показано закрашенным овалом. Его вероятность равна

$$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{33}\cdot\frac{14}{32}+\frac{18}{33}\cdot\frac{17}{32}=\frac{43}{88}\approx 0,489.$$

Ответ: прибл. 0,489.

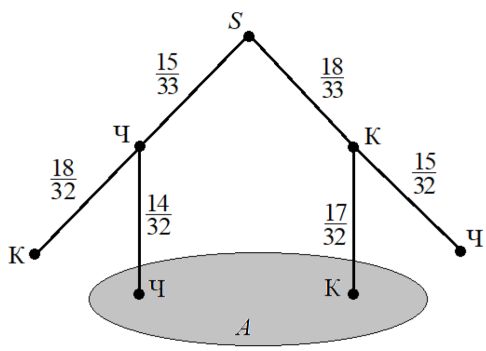

Рис. 6. Дерево эксперимента

[3] Считается, что эту задачу придумал академик Андрей Дмитриевич Сахаров. И. Ф. Гинзбург. Академик А.Д.Сахаров. Научные труды. Сборник. – М.: АОЗТ «Издательство ЦентрКом», 1995.

9. Карточный жребий. Тридцать шесть игроков играют в игру: из колоды, в которой 36 игральных карт, игроки по очереди выбирают по случайной карте. Если игроку попался туз бубен, то игрок выиграл; если же попалась другая карта, игрок возвращает её в колоду, и случайную карту тянет следующий игрок. Так они тянут карты по кругу: сначала первый, затем второй и т.д. Если на первом круге никому не попался туз бубен, игроки в том же порядке тянут карты по второму кругу. Это продолжается до тех пор, пока кто-то из них не вытянет туза бубен.

а) **(От 7 класса, 2 балла)** Честная ли это игра, то есть равны ли у игроков вероятности выигрыша?
б) **(От 9 класса, 2 балла)** Найдите хотя бы приближённо вероятность выигрыша первого игрока.

Решение. а) Обозначим вероятность выигрыша первого игрока p_1. Предположим, что первый игрок в первый раз не вытянул туза бубен. Вероятность этого $35/36$. В этот момент второй игрок становится первым, и вероятность того, что он выиграет, становится равна p_1. Возвращаясь к началу игры, мы видим, что для выигрыша второго игрока нужно, чтобы сначала первый промахнулся. Значит, в начале игры вероятность выигрыша второго игрока равна $\frac{35}{36}p_1$, а это меньше, чем p_1.

Аналогично, вероятность выигрыша у каждого следующего игрока во столько же раз меньше, чем у предыдущего: $p_{k+1}=\frac{35}{36}p_k$. Игра нечестная.

б) Для общности рассуждений будем считать, что игроков n и карт в колоде тоже n. Вероятность выигрыша первого игрока равна

$$p_1=\frac{1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}\cdot\frac{1}{n}+\ldots=\frac{1}{n}\cdot\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1}.$$

Для $n=36$ находим, что $p_1\approx 0,0436$.

Примечание. Полученное выражение можно заменить приближённым, которое даёт малую погрешность при больших n. Известно, что $\left(1-1/n\right)^n\approx 1/e$, где $e=2,718281...$ – основание натурального логарифма[4]. Чем больше n, тем точнее равенство. Тогда

$$p_1\approx\frac{1}{n}\left(1-e^{-1}\right)^{-1}=\frac{e}{n(e-1)}.$$

Для $n=36$ получаем: $p_1\approx\frac{2,72}{36\cdot 1,72}\approx 0,0439$.

Ответ: а) нет; б) прибл. $0,044$.

[4] Ещё число e называют числом Эйлера.

10. Лотерея. (От 7 класса, 3 балла) Случилось так, что у Рассеянного Учёного осталось только 20 рублей, а ему нужно купить билет на автобус, чтобы ехать домой. Билет стоит 45 р. Рядом с автобусной остановкой продаются билеты моментальной лотереи как раз по 10 р. за штуку. С вероятностью $p = 0{,}1$ билет содержит выигрыш 30 р., а других выигрышей нет. Учёный решил рискнуть, поскольку терять ему нечего. Найдите вероятность того, что Рассеянный Учёный сумеет выиграть достаточно денег, чтобы купить билет на автобус.

Решение. В результате одной или нескольких последовательных игр Учёный может остаться совсем без денег (состояние 0), с 10 рублями, с 20, 30, 40 рублями или же он может выиграть достаточно денег для покупки билета на автобус (состояние А). Схематично возможные переходы между состояниями изображаются графом (рис. 7). Вероятности переходов из состояния в состояние подписаны на соответствующих рёбрах графа. Обозначим x_1 вероятность перейти рано или поздно из состояния 10 в состояние А. Аналогично, пусть x_2, x_3 и x_4 — вероятности попасть за один или несколько переходов в состояние А из состояний 20, 30 и 40 соответственно. Нас интересует x_2.

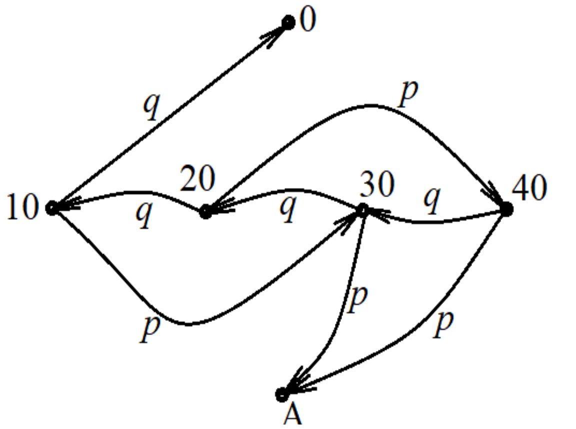

Рис. 7. Граф переходов из состояния в состояние

Перейти из состояния 10 в состояние А сразу невозможно, но можно попасть с вероятностью p в состояние 30, а уже оттуда – в А. Поэтому

$$x_1 = q \cdot 0 + px_3,$$

где $q = 1 - p$ — вероятность того, что в билете не окажется выигрыша.

Аналогично анализируя состояния 20, 30 и 40, получаем ещё три уравнения, которые вместе с первым дают систему

$$\begin{cases} x_1 = px_3, \\ x_2 = px_4 + qx_1, \\ x_3 = p + qx_2, \\ x_4 = p + qx_3. \end{cases}$$

Подставим выражения для x_1 и x_4 во второе уравнение:

$$x_2 = p\left(p + qx_3\right) + qpx_3 = p^2 + 2pqx_3.$$

Теперь подставим выражение для x_3 и получим

$$x_2 = p^2 + 2pq\left(p + qx_2\right),$$

откуда

$$x_2 = \frac{p^2(1+2q)}{1-2pq^2} = \frac{p^2(1+2-2p)}{1-2p(1-p)^2} = \frac{3p^2-2p^3}{1-2p+4p^2-2p^3}.$$

При $p = 0{,}1$ находим: $x_2 = \dfrac{14}{419} \approx 0{,}033$.

Ответ: прибл. 0,033.

11. Две задачи коллекционера. Производитель шоколадных яиц с игрушкой внутри объявил, что выпускается новая коллекция «Нильская семейка», в которой десять разных обаятельных крокодилов. Крокодилы равномерно и случайно распределены по шоколадным яйцам, то есть в случайно выбранном яйце каждый из крокодилов может оказаться с вероятностью 0,1.

Близнецы Лёша и Гоша захотели собрать две коллекции – по одной на брата. Каждый день мама покупает им по одному яйцу. Наступил момент, когда первая коллекция была, наконец, собрана.

Обозначим p_k вероятность того, что к моменту завершения первой коллекции во второй коллекции недостаёт ровно k крокодилов.

а) **(От 7 класса, 3 балла)** Докажите, что $p_1 = p_2$.

б) **(От 8 класса, 4 балла)** Докажите, что: $p_2 > p_3 > p_4 > \ldots > p_{10}$.

Решение. а) Обозначим B_k событие «в момент, когда для первой коллекции приобретён последний крокодил, во второй коллекции не хватает ровно k крокодилов». Нужно показать, что

$$p_1 = \mathrm{P}(B_1) = \mathrm{P}(B_2) = p_2.$$

Обозначим $A_{j,k}$ событие «в какой-то момент в первой коллекции не хватает ровно $j \geq 1$ различных крокодилов, а во второй коллекции – ровно k различных крокодилов». Если во второй коллекции есть какой-то крокодил, которого не хватает в первой коллекции, его можно передать в первую коллекцию, тем самым пополнив её. Поэтому можно считать, что $k \geq j$, и что все крокодилы, которые есть во второй коллекции, уже есть в первой.

Построим граф, указав стрелками возможные переходы между интересующими нас событиями, начиная с события $A_{1,2}$ «в первой коллекции не хватает одного, а во второй – двух крокодилов». Поясним, как найдены вероятности переходов (рис. 8).

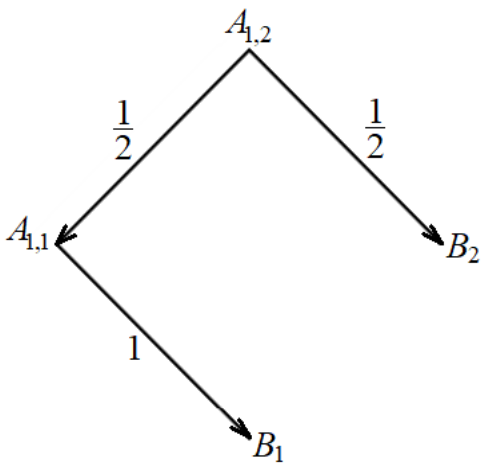

Рис. 8.

Рано или поздно братьям попадётся один из двух нужных им крокодилов. Поскольку эти крокодилы равновероятны, с вероятностью 0,5 попавшийся крокодил завершит первую коллекцию, и осуществится событие B_2. С вероятностью 0,5 этот крокодил уже есть в первой коллекции, и тогда он будет помещён во вторую, при этом осуществится событие $A_{1,1}$.

Если произошло событие $A_{1,1}$, то в обеих коллекциях не хватает одного и того же крокодила. Когда он появится, он завершит первую коллекцию, и осуществится событие B_1. Таким образом, переход от события $A_{1,1}$ к событию B_1 является достоверным – его вероятность равна 1. Следовательно,

$$p_1 = \mathrm{P}(B_1) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(A_{1,2}), \text{ и } p_2 = \mathrm{P}(B_2) = \mathrm{P}(A_{1,2}) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}\mathrm{P}(A_{1,2}).$$

б) Для общности рассуждений будем считать, что различных крокодилов в коллекции n штук. Определим события B_k и $A_{j,k}$ так же, как при решении пункта а). Уже знакомыми рассуждениями приходим к равенствам

$$p_k = \mathrm{P}(B_k) = \frac{1}{k}\mathrm{P}(A_{1,k}) \text{ и } \mathrm{P}(A_{1,k}) = \frac{2}{k}\mathrm{P}(A_{2,k}) + \frac{k}{k+1}\mathrm{P}(A_{1,k+1}),$$

причём в последнем равенстве следует считать, что $k \geq 2$, поскольку иначе событие $A_{2,k}$ не определено (или невозможно). Тогда при $k \geq 2$

$$p_k = \frac{1}{k}\mathrm{P}(A_{1,k}) = \frac{1}{k}\left(\frac{2}{k}\mathrm{P}(A_{2,k}) + \frac{k}{k+1}\mathrm{P}(A_{1,k+1})\right) > \frac{1}{k+1}\mathrm{P}(A_{1,k+1}) = p_{k+1}.$$

12. Автобусы. (От 8 класса, 2 балла) На остановке около дома Рассеянного Учёного останавливаются автобусы двух маршрутов: № 152 и № 251. Оба они идут к станции метро. Интервал между автобусами № 152 ровно 5 минут, а интервал между автобусами 251-го маршрута ровно 7 минут. Интервалы строго соблюдаются, но между собой эти два маршрута не согласованы и их расписания не зависят друг от друга. В совершенно случайный момент времени Рассеянный Учёный приходит на остановку и садится в первый же подошедший автобус, чтобы доехать до метро. Какова вероятность того, что Учёный сядет в автобус № 251?

Решение. Будем считать, что Рассеянный Учёный подошел к остановке в момент времени 0 минут. Пусть $x-5$ и x – моменты, когда к остановке подошли автобусы маршрута 152, причём на первый из этих автобусов Учёный не успел, а на второй мог успеть, то есть $x-5<0\le x$. Из этого неравенства получается, что $0\le x<5$.

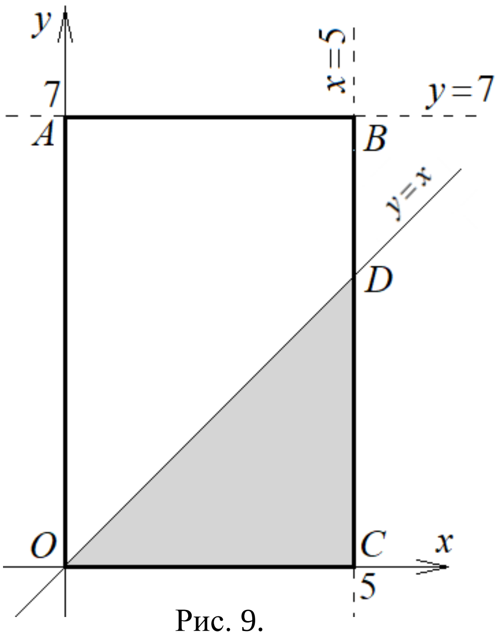

Рис. 9.

Поскольку Учёный приходит в произвольный момент (без предпочтений), то можно считать, что после момента его прихода, который мы взяли за начало отсчёта, автобус № 152 может подойти к остановке в любой момент в промежутке от 0 до 5 минут, причём никакой момент времени не более предпочтителен, чем любой другой.

Рассуждая точно так же про автобусы 251-го маршрута, мы видим, что после прихода Учёного автобус № 251 может появиться в любой момент времени в промежутке от 0 до 7 минут: $0\le y<7$.

Значит, множество элементарных событий можно представить как прямоугольник $OABC$, ограниченный осями координат и прямыми $x=5$ и $y=7$ (рис. 9). Каждое элементарное событие – это точка с координатами $(x;y)$, которая случайно выбирается из этого прямоугольника.

Событие «Учёный сядет в автобус № 251» произойдёт, только если автобус № 251 придёт раньше, чем автобус № 152, то есть если $y<x$. Внутри прямоугольника это неравенство определяет треугольник ODC. Следовательно, вероятность этого события равна

$$\mathrm{P}(ODC)=\frac{S_{ODC}}{S_{OABC}}=\frac{25}{2\cdot 35}=\frac{5}{14}.$$

Ответ: $5/14$.

13. Шеренга. (От 8 класса, 3 балла) Случайным образом в шеренгу становятся 20 воспитанников детского сада, из них 11 девочек и 9 мальчиков. Найдите вероятность того, что между первым и последним мальчиками окажется не больше пяти девочек.

Решение. Пронумеруем места в шеренге слева направо. Условию задачи удовлетворяют шеренги, в которых все мальчики сосредоточены на первых 14 местах. Таких комбинаций, а значит, и таких шеренг, ровно C_{14}^{9}.

Кроме этих шеренг, условию удовлетворяют все шеренги, где последний мальчик стоит на 15-м месте, а ещё 8 мальчиков как-то распределены по местам от 2-го до 14-го (всего 13 мест). Таких шеренг C_{13}^{8}. Столько же шеренг, где последний мальчик на 16-м месте, а ещё 8 занимают какие-то из 13 мест с 3-го по 15-е. Столько же комбинаций, когда последний мальчик стоит на 17-м, 18-м, 19-м и 20-м месте. Таким образом, всего получается $6C_{13}^{8}$ различных шеренг, удовлетворяющих условию задачи, где последний мальчик стоит на месте с номером 15 или больше.

Всего же 9 мальчиков можно расположить в шеренге C_{20}^{9} способами, из них условию задачи удовлетворяют $C_{14}^{9}+6C_{13}^{8}$ способов. Считая все комбинации равновозможными (по условию дети выстроились случайным образом), находим искомую вероятность:

$$\frac{C_{14}^{9}+6C_{13}^{8}}{C_{20}^{9}}\approx 0,058.$$

Ответ: прибл. 0,058.

14. Несимметричная монета. (От 9 класса, 2 балла) У Билли Бонса есть две монеты — золотая и серебряная. Одна из них симметричная, а другая — нет. Неизвестно, какая именно монета несимметрична, но известно, что несимметричная монета выпадает орлом с вероятностью $p=0,6$.

Билли Бонс бросил золотую монету, и сразу выпал орёл. Тогда Билли Бонс стал бросать серебряную монету, и орёл выпал только со второго броска. Найдите вероятность того, что несимметричной является золотая монета.

Решение. Введём обозначения для событий:

$$A=\{\textit{Золотая монета несимметрична}\},$$

$$B=\left\{\begin{array}{l}\textit{При броске золотой монеты орёл выпал сразу,}\\ \textit{а при бросаниях серебряной орёл выпал со второй попытки.}\end{array}\right\}$$

Требуется найти условную вероятность $\mathrm{P}(A|B)$. Применим формулу Байеса:

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(B|A)\cdot\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(B|A)\cdot\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B|A)\cdot\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B|\bar{A})\cdot\mathrm{P}(\bar{A})}=$$

$$=\frac{p\cdot 0{,}5^2}{p\cdot 0{,}5^2+0{,}5\cdot(1-p)p}=\frac{0{,}5}{0{,}5+(1-p)}=\frac{0{,}5}{0{,}5+0{,}4}=\frac{5}{9}.$$

Ответ: $5/9$.

15. Три ладьи. (От 9 класса, 2 балла) На три случайных поля шахматной доски поставили три ладьи. Найдите математическое ожидание числа полей на доске, которые находятся под боем хотя бы одной ладьи. Считается, что если ладья стоит на каком-то поле, то она сама это поле не бьёт, но другая ладья может его бить.

Решение. Рассмотрим некоторое поле, скажем E5. Оно не находится под боем никакой ладьи в двух случаях:

1. Все три ладьи расположены на полях, не находящихся ни на вертикали E, ни на 5-й горизонтали (рис. 10 а). В силу равновозможности всех расстановок ладей, вероятность этого события равна $\frac{C_{49}^3}{C_{64}^3}$.

2. Одна из ладей стоит на поле E5, а две другие не находятся ни на вертикали E, ни на 5-й горизонтали (рис. 10 б). Вероятность этого равна $\frac{C_{49}^2}{C_{64}^3}$.

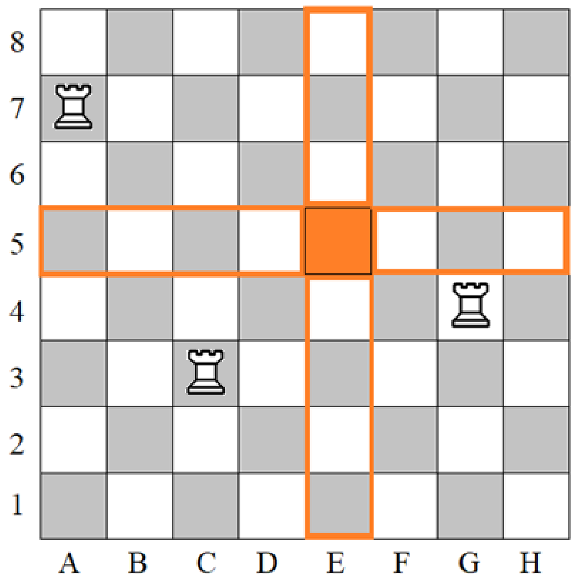

Рис. 10 а)

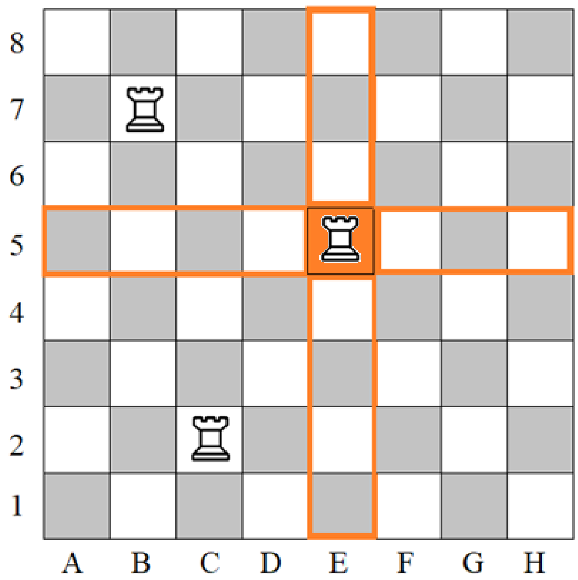

Рис. 10 б)

Следовательно, вероятность того, что поле E5 находится под боем, равна $1-\frac{C_{49}^2+C_{49}^3}{C_{64}^3}=1-\frac{C_{50}^3}{C_{64}^3}$. Это же верно для всех других полей.

Пронумеруем каким-нибудь образом все поля числами от 1 до 64 и определим бинарные случайные величины I_k для $k=1, 2, ..., 64$ следующим образом.

$$I_k = \begin{cases} 0, \text{если поле } k \text{ не находится под боем,} \\ 1, \text{если находится.} \end{cases}$$

Тогда $\mathrm{E}\, I_k = \mathrm{P}(I_k = 1) = 1 - \frac{C_{50}^3}{C_{64}^3}$ для любого k. Выразим случайную величину X «количество полей, которые находятся под боем» через величины I_k:

$$X = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_{64}$$

и перейдём в этом равенстве к математическому ожиданию:

$$\mathrm{E}\, X = 64 \cdot \left(1 - \frac{C_{50}^3}{C_{64}^3}\right) \approx 33{,}89.$$

Ответ: прибл. 33,89.

16. Мосты. (От 9 класса, 3 балла) Вдоль южного берега бескрайнего моря цепочкой раскинулся архипелаг из бесконечного количества островов. Острова соединены бесконечной цепочкой мостов, и каждый остров соединён мостом с берегом. В случае сильного землетрясения каждый мост независимо от других с вероятностью $p = 0{,}5$ разрушается. Какова вероятность того, что после сильного землетрясения с первого острова можно будет перебраться по сохранившимся мостам на берег?

Решение. Пронумеруем мосты, как показано на рисунке 11. Если сохранился мост b_1 (вероятность этого $q = 1 - p$), то по нему можно перейти на берег.

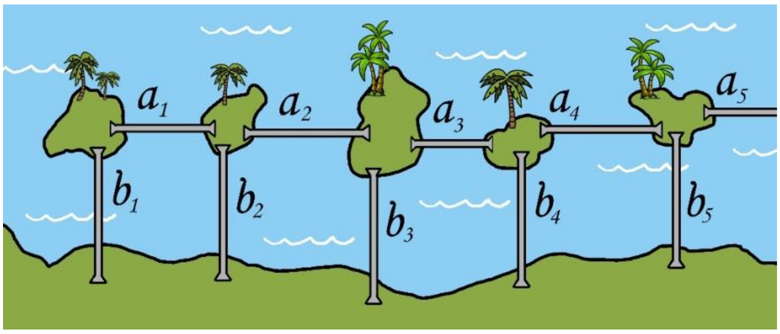

Рис. 11.

Если мост b_1 разрушен, но сохранились мосты a_1 и b_2, то можно перейти на берег по ним. Вероятность такого события равна pq^2.

И так далее: если разрушены все мосты от b_1 до b_n, но сохранился мост b_{n+1}, то перейти на берег можно, только если сохранились мосты $a_1, a_2, ..., a_n$. Вероятность такого события равна $p^n q^{n+1}$.

Поскольку островов бесконечно много, таких событий тоже бесконечно много, и все они несовместны. Полная вероятность события «с первого острова можно перейти на берег по мостам» равна сумме вероятностей этих событий:

$$q+pq^2+p^2q^3+\ldots+p^nq^{n+1}+\ldots=\frac{q}{1-pq}.$$

Подставляя $p=q=0,5$, находим искомую вероятность: $\frac{0,5}{1-0,25}=\frac{2}{3}$.

Ответ: $2/3$.

17. Максимальные группы. **(От 9 класса, 4 балла)** Имитировать случайные процессы человеку трудно. Даже серию бросаний монеты придумать «из головы» почти невозможно. Одна из причин в том, что в длинной серии человек подсознательно старается не допустить «слишком много» орлов или решек подряд. В действительно случайной серии, как правило, встречаются довольно длинные группы, состоящие только из орлов или только из решек. Например, при 100 бросаниях монеты, скорее всего (с вероятностью около 0,54), встретятся 7 орлов или 7 решек подряд, а математическое ожидание наибольшей длины такой группы равно приблизительно 6,98.

Если монета k раз подряд выпала одной и той же стороной вверх, будем называть такую подпоследовательность *группой* длины k. Например, в последовательности ОРРРООРР четыре группы, длины которых равны 1, 3, 2 и 2.

Обозначим $p_{n,\,k}$ вероятность того, что в серии из n бросаний симметричной монеты содержится группа длины k или больше ($k<n$). Выведите рекуррентную формулу

$$p_{n,\,k}=p_{n-1,\,k}-\frac{1}{2^k}p_{n-k,\,k}+\frac{1}{2^k}.$$

Решение. Для краткости будем называть k-*серией* серию, где есть группа длины k или больше. Пересчитаем все k-серии длины n ($n\ge k$), которые начинаются с орла. Обозначим их количество $A_{n,k}$ ($A_{n,\,k}=0$ при $n<k$). В силу симметрии количество k-серий, начинающихся с решки, тоже равно $A_{n,k}$.

Пусть k-серия длины $n\ge k$ имеет вид ОР$*$ (звёздочка означает произвольную последовательность орлов и решек). Количество таких k-серий равно количеству k-серий длины $n-1$, начинающихся с решки. То есть таких k-серий $A_{n-1,k}$ штук. Аналогично, k-серий вида ООР$*$ всего $A_{n-2,\,k}$. И так далее до k-серий вида $\underbrace{\text{ОО...ОР}}_{k-1\,\text{орёл}}*$, которых ровно $A_{n-k+1,\,k}$. И есть ещё k-серии вида $\underbrace{\text{ООООО...ОО}}_{k\text{ или больше орлов}}*$. Таких серий ровно 2^{n-k}. Следовательно,

$$A_{n,\,k}=A_{n-1,\,k}+A_{n-2,\,k}+A_{n-3,\,k}+\ldots+A_{n-k+1,\,k}+2^{n-k}. \qquad (1)$$

Мы полагаем, что $n>k$, а равенство (1) получено при $n\ge k$. Это даёт возможность использовать его для $A_{n-1,\,k}$:

$$A_{n-1,\,k}=A_{n-2,\,k}+A_{n-3,\,k}+A_{n-4,\,k}+\ldots+A_{n-k+1,\,k}+A_{n-k,\,k}+2^{n-1-k},$$

откуда

$$A_{n-2,\,k}+A_{n-3,\,k}+A_{n-4,\,k}+\ldots+A_{n-k+1,\,k}=A_{n-1,\,k}-A_{n-k,\,k}-2^{n-1-k}.$$

Подставляя это выражение в равенство (1), получаем:

$$A_{n,k} = A_{n-1,k} + A_{n-1,k} - A_{n-k,k} - 2^{n-1-k} + 2^{n-k} = 2A_{n-1,k} - A_{n-k,k} + 2^{n-1-k}.$$

Всего k-серий вдвое больше, чем k-серий, начинающихся с орла. Поэтому $p_{n,k} = \frac{2A_{n,k}}{2^n}$, откуда $A_{n,k} = 2^{n-1} p_{n,k}$. Тогда

$$2^{n-1} p_{n,k} = 2 \cdot 2^{n-2} p_{n-1,k} - 2^{n-k-1} p_{n-k,k} + 2^{n-1-k}.$$

Разделив обе части этого равенства на 2^{n-1}, получаем нужную формулу.

Примечание. С помощью выведенной формулы последовательно вычисляются вероятности $p_{n,k}$. Для начала рекурсии, очевидно, следует положить $p_{n,k} = 0$ при $1 \le n < k$ и $p_{n,n} = \frac{1}{2^{n-1}}$ для всех натуральных n.

С помощью вероятностей $p_{n,k}$ можно найти, например, математическое ожидание длины наибольшей группы в случайной последовательности длины n. Если обозначить эту величину X_n, то

$$\mathrm{E}\, X_n = p_{n,1} + p_{n,2} + \ldots + p_{n,n}$$

(докажите это равенство в качестве несложного упражнения). На рис. 13 приведено вычисление в Excel. Например, $\mathrm{E}\, X_{25} \approx 4{,}980$.

18. Убывающая плотность. (От 10 класса, 3 балла) Непрерывная случайная величина X имеет функцию плотности $y = f(x)$, которая равна нулю при $x < a$ и при $x \ge b$, а на промежутке $[a; b)$ непрерывна, положительна и монотонно убывает. Докажите, что математическое ожидание случайной величины X больше, чем её медиана[5].

Решение. Не уменьшая общность рассуждений, можно считать, что медиана равна нулю. Тогда нужно доказать, что математическое ожидание положительно. Изобразим схематично функцию плотности (рис.12).

Участок графика на отрезке $[0; -a]$ отразим симметрично относительно оси ординат и разобьём фигуру, ограниченную осью абсцисс и графиком плотности, на три фигуры: G_1, G_2 и G_3.

Фигура G_2 симметрична относительно оси ординат, поэтому её центр масс имеет абсциссу $x_2 = 0$. Центр масс фигуры G_1 имеет абсциссу x_1, причём $a < x_1 < 0$, а центр масс фигуры G_3 имеет абсциссу x_3, причём

[5] Медианой случайной величины X называется такое число m, что $\mathrm{P}(X \le m) \ge 0{,}5$ и $\mathrm{P}(X \ge m) \ge 0{,}5$. Если случайная величина имеет конечную функцию плотности $y = f(x)$, то прямая $x = m$ делит фигуру, ограниченную осью абсцисс и графиком плотности, на две фигуры, площадь каждой из которых равна 0,5.

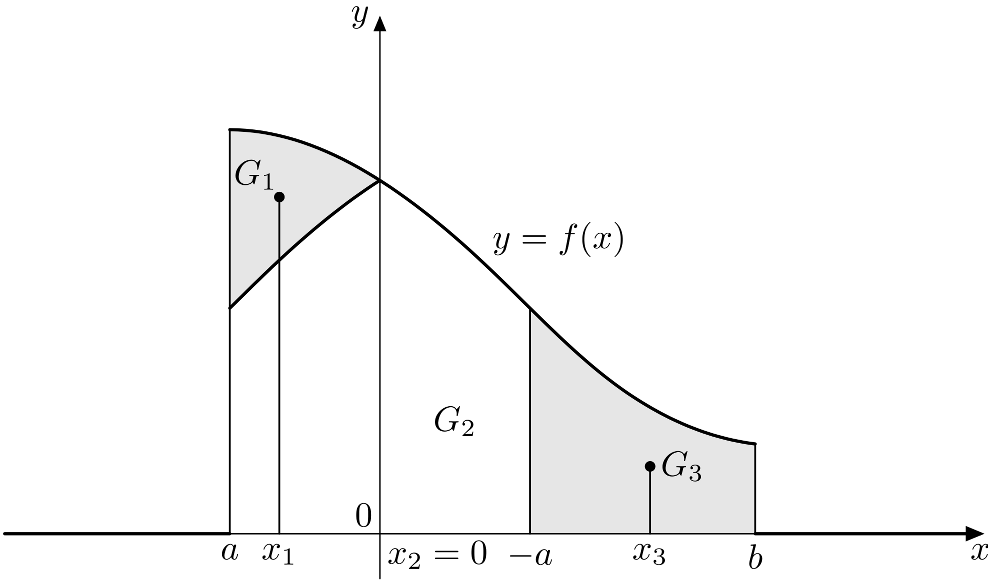

Рис.12.

$-a < x_3 < b$. Площади фигур G_1 и G_3 равны: $S_{G_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} S_{G_2} = S_{G_3}$. Математическое ожидание X выражается через площади трёх этих фигур и абсциссы их центров масс:

$$\mathrm{E}\,X = x_1 S_{G_1} + x_2 S_{G_2} + x_3 S_{G_3} > a S_{G_1} + 0 \cdot S_{G_2} - a S_{G_3} = 0,$$

что требовалось доказать.

19. Сколько самолётов? (От 11 класса, 8 баллов) Работа Рассеянного Учёного связана с длительными командировками, и поэтому он часто летает самолётами одной и той же авиакомпании. У этой авиакомпании много одинаковых самолётов, и все они имеют имена. Поскольку Учёный летает не каждый день и даже не каждую неделю, можно считать, что всякий раз ему «достаётся» случайный самолёт. Из любопытства и по привычке Рассеянный Учёный каждый раз записывает, на каком самолёте он летит. В своём пятнадцатом полёте Учёный оказался на борту самолёта, гордо носящего имя «Симеон Дени Пуассон». После взлёта Учёный достал свою книжечку, чтобы записать имя самолёта, и обнаружил, что на «Пуассоне» он уже один раз летел, а прежде повторений не было. Оцените количество самолётов в авиакомпании.

Решение. Рассмотрим случайную величину X «порядковый номер полёта, когда в первый раз Учёному достался самолёт, которым он летал прежде». Сделаем точечную оценку числа самолётов методом моментов. Для этого нужно хотя бы приближённо решить уравнение $\mathrm{E}X = 15$.

Найдём $\mathrm{E}X$. Обозначим n количество самолётов в авиакомпании. Рассмотрим событие A_j «до j-го полёта включительно повторений не было» $(j=1,\ldots,n)$. Пусть I_j — индикатор события A_j. Тогда

$$X = 1 + I_1 + I_2 + \ldots + I_n.$$

Найдем математические ожидания индикаторов.

$$\mathrm{E}I_j = \mathrm{P}(A_j) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-j+1)}{n^j} = \frac{n!}{(n-j)!\cdot n^j}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{E}X = \mathrm{E}(1 + I_1 + I_2 + \ldots + I_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n-j)!\cdot n^j} = \frac{n!}{n^n}\sum_{j=0}^{n} \frac{n^{n-j}}{(n-j)!} = \frac{n!}{n^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

В последнем преобразовании сделана замена $k = n - j$.

Рассмотрим отдельно получившуюся сумму:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = e^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k e^{-n}}{k!} = e^n F(n),$$

где $F(x)$ – функция распределения Пуассона с параметром n. Медиана распределения Пуассона с целым параметром n равна n. Это означает, что

$$F(n-1) \le \frac{1}{2} \le F(n),$$

поэтому

$$F_P(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k e^{-n}}{k!} = \frac{1}{2} + \theta \frac{n^n e^{-n}}{n!},$$

где $0 \le \theta \le 1$. Положив для определённости $\theta = 1/2$, получаем:

$$\mathrm{E}X = \frac{n!e^n}{n^n} F_P(n) \approx \frac{n!e^n}{n^n}\left(\frac{1}{2} + \frac{n^n e^{-n}}{2n!}\right) = \frac{n!e^n}{2n^n} + \frac{1}{2}.$$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$$\mathrm{E}X \approx \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^n}{2n^n e^n} + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}} + \frac{1}{2}.$$

Чтобы найти оценку $x = \hat{n}$, решим уравнение $\sqrt{\frac{\pi x}{2}} + \frac{1}{2} = 15$. С округлением до целых получаем: $x \approx 134$.

Ответ: прибл. 134 (точечная оценка методом моментов).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA
1	n\k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	EX
2	1	1																									1
3	2	1	0,5																								1,5
4	3	1	0,75	0,25																							2,0
5	4	1	0,875	0,375	0,125																						2,375
6	5	1	0,938	0,5	0,188	0,063																					2,688
7	6	1	0,969	0,594	0,25	0,094	0,031																				2,938
8	7	1	0,984	0,672	0,313	0,125	0,047	0,016																			3,156
9	8	1	0,992	0,734	0,367	0,156	0,063	0,023	0,008																		3,344
10	9	1	0,996	0,785	0,418	0,188	0,078	0,031	0,012	0,004																	3,512
11	10	1	0,998	0,826	0,465	0,217	0,094	0,039	0,016	0,006	0,002																3,662
12	11	1	0,999	0,859	0,508	0,245	0,109	0,047	0,02	0,008	=K11+(1-K2)/2^K$1																3,799
13	12	1	1	0,886	0,547	0,272	0,125	0,055	0,023	0,01	0,004	0,001	5E-04														3,924
14	13	1	1	0,908	0,584	0,299	0,139	0,063	0,027	0,012	0,005	0,002	7E-04	2E-04													4,039
15	14	1	1	0,926	0,617	0,324	0,154	0,07	0,031	0,014	0,006	0,002	1E-03	4E-04	1E-04												4,146
16	15	1	1	0,94	0,648	0,349	0,168	0,078	0,035	0,016	0,007	0,003	0,001	5E-04	2E-04	6E-05											4,245
17	16	1	1	0,951	0,676	0,372	0,183	0,085	0,039	0,018	0,008	0,003	0,001	6E-04	2E-04	9E-05	3E-05										4,338
18	17	1	1	0,961	0,702	0,395	0,197	0,093	0,043	0,02	0,009	0,004	0,002	7E-04	3E-04	1E-04	5E-05	2E-05									4,425
19	18	1	1	0,968	0,726	0,417	0,21	0,1	0,047	0,021	0,01	0,004	0,002	9E-04	4E-04	2E-04	6E-05	2E-05	8E-06								4,508
20	19	1	1	0,974	0,748	0,438	0,224	0,108	0,051	0,023	0,011	0,005	0,002	1E-03	4E-04	2E-04	8E-05	3E-05	1E-05	4E-06							4,585
21	20	1	1	0,979	0,768	0,458	0,237	0,115	0,054	0,025	0,012	0,005	0,002	0,001	5E-04	2E-04	9E-05	4E-05	2E-05	6E-06	2E-06						4,659
22	21	1	1	0,983	0,787	0,478	0,25	0,122	0,058	0,027	0,013	0,006	0,003	0,001	5E-04	2E-04	1E-04	5E-05	2E-05	8E-06	3E-06	1E-06					4,729
23	22	1	1	0,986	0,804	0,497	0,263	0,13	0,062	0,029	0,014	0,006	0,003	0,001	6E-04	3E-04	1E-04	5E-05	2E-05	1E-05	4E-06	1E-06	5E-07				4,796
24	23	1	1	0,989	0,82	0,515	0,275	0,137	0,066	0,031	0,015	0,007	0,003	0,001	7E-04	3E-04	1E-04	6E-05	3E-05	1E-05	5E-06	2E-06	7E-07	2E-07			4,860
25	24	1	1	0,991	0,834	0,533	0,288	0,144	0,069	0,033	0,016	0,007	0,003	0,002	7E-04	3E-04	2E-04	7E-05	3E-05	1E-05	6E-06	2E-06	1E-06	4E-07	1E-07		4,921
26	25	1	1	0,993	0,848	0,55	0,3	0,151	0,073	0,035	0,017	0,008	0,004	0,002	8E-04	4E-04	2E-04	8E-05	3E-05	2E-05	7E-06	3E-06	1E-06	5E-07	2E-07	6E-08	**4,980**

Рис. 13. К задаче 17. Расчёт вероятностей $p_{n,k}$ и математических ожиданий длин наибольших групп