

Вариант 1

Задание №1 (5 баллов)

Укажите все двузначные натуральные числа такие, что

$$\sqrt{ab} = a + \sqrt{b}$$

Ответ: 49,64,81

Решение:

Мы знаем, что число \overline{ab} – это квадратное число. Соответственно, поскольку по условию число двузначное, то $a \neq 0$.

Проще всего решить данную задачу методом перебора.

Выпишем все двузначные квадратные числа – 16, 25, 36, 49, 64 и 81 и проверим, какие из них соответствуют заданному условию.

После проверки у нас получится, что решением являются числа 49,64,81.

Ответ: 49,64,81

Задание №2 (5 баллов)

Представьте число 2019 в виде $a^b + b^a$, где a и b – натуральные числа. В ответ запишите все получившиеся пары чисел: сперва запишите значения a , затем через точку с запятой значения b .

Ответ:

- 2018;1
- 1;2018

Решение:

Нам нужно решить в натуральных числах уравнение

$$a^b + b^a = 2019$$

Рассмотрим случаи, когда $a=1$:

$$1^b + b^1 = 2019$$

$$1 + b = 2019$$

$$b = 2018$$

Аналогично и для $b=1$.

Получаем два решения 1; 2018 и 2018;1

Рассмотрим при $a=2$, $b>4$:

$$2^b + b^2 = 2019$$

Так как 2019 – нечетное, то b -нечетное, т.е. $b = 2n+1$, где n - натуральное, $n>1$

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор теоретических заданий по математике 8-9 класс

$$\begin{aligned}2^{2n+1} + (2n + 1)^2 &= 2019 \\4 \times 2^{2n-1} + 4n^2 + 4n + 1 &= 2019 \\4 \times 2^{2n-1} + 4n^2 + 4n &= 2018 \\2^{2n-1} + n^2 + n &= 2018 \div 4 \\2^{2n-1} + n^2 + n &= 504,5 \text{ не целое.}\end{aligned}$$

Мы пришли к противоречию.

Аналогично и для $b=2$, $a>4$

В случае, если a – нечетное ($a>2$), то b – четное. И мы снова сможем повторить аналогичные рассуждения.

Таким образом, у нас есть два решения:

Ответ:

- 2018;1
- 1;2018

Задание №3 (10 баллов)

Шар радиуса $R=3390$ км стянут по экватору крепким нерастяжимым обручем, плотно прилегающим к поверхности шара.

Длину обруча увеличили на 90 сантиметров. Определите, пройдет ли в образовавшийся зазор хорошо накаченный мяч, длина окружности которого равна 28 дюймам. Примите $\pi \approx 3,14$, 1 дюйм = 2,54 см.

- а) в случае концентрического расположения обруча и шара;
б) в случае, когда обруч касается поверхности шара.

Ответ.

- а) Нет
б) Да

Решение:

Чтобы в зазор между обручем и шаром прошел мяч, нужно, чтобы величина зазора была не меньше диаметра шара.

Рассчитаем диаметр шара:

$$D = C : \pi = 28 : 3,14 \approx 8,92 \text{ дюймов}$$

Переведем полученную величину диаметра в сантиметры:

$$8,92 \times 2,54 \approx 22,66 \text{ см}$$

Рассчитаем, на сколько увеличился радиус обруча:

$$\frac{(C_{\text{бол}} + l)}{2\pi} - R = R + \frac{l}{2\pi} - R = \frac{l}{2\pi} = \frac{90}{2 \times 3,14} = 45 : 3,14 \approx 14,33 \text{ см}$$

Тогда диаметр обруча увеличился на

$$2 \times 14,33 \approx 28,66 \text{ см}$$

а) в случае концентрического расположения обруча и шара обруч удален на равное расстояние от шара во всех направлениях. Значит, величина зазора между обручем и шаром будет равна:

$$\frac{l}{2\pi} \approx 14,33 \text{ см}$$

Так как диаметр шара равен 22,66 см, то при данной конфигурации шар не пролезет в зазор.

б) в случае, когда обруч касается поверхности шара, величина зазора между шаром и обручем равна

$$\frac{l}{\pi} \approx 28,66 \text{ см}$$

Так как диаметр шара равен 22,66 см, то при данной конфигурации шар пролезет в зазор.

Ответ.

а) Нет

б) Да

Задание №4 (10 баллов)

Решите уравнение $(x + 2y)(2x - y) = -2$. В ответ запишите все получившиеся пары чисел: сперва запишите значения x , затем, через точку с запятой, значения y .

Ответ:

- 0;-1
- 0;1

Решение:

Поскольку решить данное уравнение нужно в целых числах, то данное уравнение будет равносильно следующей совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \{ x + 2y = 1 \\ 2x - y = -2 \} \\ \{ x + 2y = -2 \\ 2x - y = 1 \} \\ \{ x + 2y = -1 \\ 2x - y = 2 \} \\ \{ x + 2y = 2 \\ 2x - y = -1 \} \end{array} \right.$$

После решения данной совокупности систем линейных уравнений получаем ответ:

$$\left[\begin{array}{l} \{ x = 0,8 \\ y = -0,6 \} \\ \{ x = 0 \\ y = -1 \} \\ \{ x = 0,6 \\ y = -0,8 \} \\ \{ x = 0 \\ y = 1 \} \end{array} \right.$$

Дробные решения нам не подходят по условию задачи. Соответственно, получаем ответ: 0;-1 и 0;1

Ответ:

- 0;-1
- 0;1

Задание №5 (16 баллов)

Проведите статистический анализ дискретного ряда значений. В качестве значений возьмите *количество букв в словах*, входящих в следующий отрывок из стихотворения Александра Сергеевича Пушкина:

Зима! Крестьянин, торжествуя,
На дровнях обновляет путь;
Его лошадка, снег почуя,
Плетется рысью как-нибудь;
Бразды пушистые взрывая,
Летит кибитка удалая;
Ямщик сидит на облучке
В тулупе, в красном кушаке.

В ответе укажите:

- А) Среднее ряда;
- Б) Размах ряда;
- В) Медиану ряда;
- Г) Моду ряда.

При необходимости результаты округлите до десятых.

Ответ:

- А) 5,7
- Б) 9
- В) 6
- Г) 7

Решение:

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор теоретических заданий по математике 8-9 класс

Запишем ряд, которому соответствует количество букв в словах стихотворения:

4, 10, 10, 2, 7, 9, 4, 3, 7, 4, 5, 8, 5, 9, 6, 8, 7, 5, 7, 6, 5, 5, 2, 7, 1, 6, 1, 7, 6

Упорядочим ряд по возрастанию:

1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10

Проведем частотный анализ ряда:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	1	3	5	4	6	2	2	2

А) Подсчитаем среднее ряда:

$$\begin{aligned} & \frac{1 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 3 + 5 \times 5 + 6 \times 4 + 7 \times 6 + 8 \times 2 + 9 \times 2 + 10 \times 2}{2 + 2 + 1 + 3 + 5 + 4 + 6 + 2 + 2 + 2} \\ &= \frac{9 + 12 + 25 + 24 + 42 + 16 + 18 + 20}{8 + 9 + 12} = \frac{21 + 24 + 25 + 60 + 36}{29} = \\ &= \frac{70 + 36 + 60}{29} = \frac{166}{29} \approx 5,7; \end{aligned}$$

Б) Размах ряда равен $10 - 1 = 9$;

В) Медиана ряда равна 6;

Г) Мода ряда равна 7.

Ответ:

А) 5,7

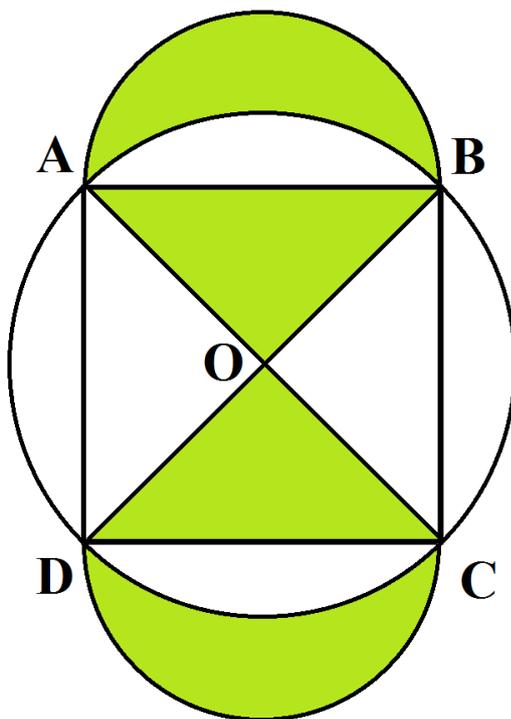
Б) 9

В) 6

Г) 7

Задание №6 (20 баллов)

Вокруг квадрата ABCD описана окружность. На сторонах квадрата AB и CD как на диаметрах построены полуокружности. Длина отрезка AO равна $3\sqrt{2}$ см. Определите, чему равна площадь закрашенной части фигуры (См. рисунок). $\pi \approx 3.14$. При необходимости, ответ округлите до десятых.



Ответ: 36 см^2

Решение:

Закрашенная фигура состоит из частей двух типов – из двух треугольников и двух фигур, называемых «Луночки Гиппократа». Можно доказать, что площадь четырех таких луночек будет равна площади квадрата ABCD.

Соответственно, площадь двух треугольников и двух луночек Гиппократа будет равна площади квадрата ABCD.

Длина отрезка $AC = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ см

Поскольку ABCD – квадрат, а, следовательно, и ромб, то его площадь равна:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 6\sqrt{2} = 36 \text{ см}^2$$

Ответ: 36 см^2

Задание №7 (15 баллов)

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор теоретических заданий по математике 8-9 класс

Сумма квадрата полусуммы двух чисел и квадрата полуразности этих же чисел равна 50. Разность квадрата полусуммы этих же чисел и квадрата полуразности этих чисел равна 48. Определите чему равно:

- 1) среднее арифметическое этих чисел;
- 2) среднее геометрическое этих чисел;
- 3) сумма чисел, обратным к этим числам.

Ответы округлите до сотых.

Ответы:

- 1) 7 или -7
- 2) 6,93
- 3) 0,29 или - 0,29

Решение:

Запишем, что нам дано:

$$\begin{cases} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 50 & (1) \\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 48 & (2) \end{cases}$$

Определим, что нужно найти:

$$\frac{a+b}{2}$$

Сложим строки (1) и (2) и выразим искомую величину:

$$2 \times \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 98$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 49$$

$$\frac{a+b}{2} = 7 \text{ или } \frac{a+b}{2} = -7$$

Определим среднее геометрическое чисел:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 48$$

$$\frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2) = 48$$

$$\frac{1}{4}(4ab) = 48$$

$$ab = 48$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3} \approx 6,93$$

Найдем сумму чисел, обратных к этим числам:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{a+b}{2} \times \frac{2}{(\sqrt{ab})^2}$$

Если $\frac{a+b}{2} = 7$, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{a+b}{2} \times \frac{2}{(\sqrt{ab})^2} = 7 \times \frac{2}{48} = \frac{7}{24} \approx 0,29$$

Если $\frac{a+b}{2} = -7$, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{a+b}{2} \times \frac{2}{(\sqrt{ab})^2} = -7 \times \frac{2}{48} = -\frac{7}{24} \approx -0,29$$

Ответы:

1) 7 или -7

2) 6,93

3) 0,29 или -0,29

Задание №8 (19 баллов)

Решите систему уравнений. Запишите в ответ все пары корней, сперва значения x , затем через точку с запятой значения y .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 = 2xy + 6y - 8x + 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Решение:

Упростим первое уравнение:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 &= 2xy + 6y - 8x + 12 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 6y + 8x - 8y + 25 - 12 &= 0 \\ (x - y)^2 + 14(x - y) + 13 &= 0 \end{aligned}$$

Решим уравнение относительно $z = x - y$:

$$z^2 + 14z + 13 = 0$$

Получим

$$z_1 = -13 \text{ и } z_2 = -1$$

Тогда наша система будет равносильна следующей совокупности:

$$\begin{cases} x - y = -13 \\ x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Далее мы получаем ответ:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ответ:

- 2;3
- -4;9

Вариант 2

Задание №1 (5 баллов)

Укажите все двузначные натуральные числа такие, что

$$\sqrt{ab} = a + \sqrt{b}$$

Ответ:

- 49
- 64
- 81

Решение:

Мы знаем, что число \overline{ab} – это квадратное число. Соответственно, поскольку по условию число двузначное, то $a \neq 0$.

Проще всего решить данную задачу методом перебора.

Выпишем все двухзначные квадратные числа – 16, 25, 36, 49, 64 и 81 и проверим, какие из них соответствуют заданному условию.

После проверки у нас получится, что решением являются числа 49,64,81.

Ответ: 49,64,81

Задание №2 (5 баллов)

Представьте число 2019 в виде $a^b + b^a$, где a и b – натуральные. В ответ запишите все получившиеся пары чисел: сперва запишите значения a , затем через точку с запятой значения b .

Ответ:

- 2018, 1
- 1,2018

Решение:

Нам нужно решить в натуральных числах уравнение

$$a^b + b^a = 2019$$

Рассмотрим случаи, когда $a=1$:

$$1^b + b^1 = 2019$$

$$1 + b = 2019$$

$$b = 2018$$

Аналогично и для $b=1$.

Получаем два решения 1; 2018 и 2018;1

Рассмотрим при $a=2$, $b>4$:

$$2^b + b^2 = 2019$$

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор теоретических заданий по математике 8-9 класс

Так как 2019 – нечетное, то b -нечетное, т.е. $b = 2n+1$, где n - натуральное, $n > 1$

$$2^{2n+1} + (2n + 1)^2 = 2019$$

$$4 \times 2^{2n-1} + 4n^2 + 4n + 1 = 2019$$

$$4 \times 2^{2n-1} + 4n^2 + 4n = 2018$$

$$2^{2n-1} + n^2 + n = 2018 \div 4$$

$$2^{2n-1} + n^2 + n = 504,5 \text{ не целое.}$$

Мы пришли к противоречию.

Аналогично и для $b=2$, $a > 4$

В случае, если a – нечетное ($a > 2$), то b – четное. И мы снова сможем повторить аналогичные рассуждения.

Таким образом, у нас есть два решения:

Ответ:

- 2018;1
- 1;2018

Задание №3 (10 баллов)

Шар радиуса $R=2440$ км стянут по экватору крепким нерастяжимым обручем, плотно прилегающим к поверхности шара.

Длину обруча увеличили на 43 сантиметра. Определите, пройдет ли в образовавшийся зазор мяч, длина окружности которого равна 8,26 дюйма. Примите $\pi \approx 3,14$, 1 дюйм = 2,54 см.

а) в случае концентрического расположения обруча и шара;

б) в случае, когда обруч касается поверхности шара.

Ответ.

а) Да

б) Да

Решение:

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор теоретических заданий по математике 8-9 класс

Чтобы в зазор между обручем и шаром прошел мяч, нужно, чтобы величина зазора была не меньше диаметра шара.

Рассчитаем диаметр шара:

$$D = C : \pi = 8,26 : 3,14 \approx 2,63 \text{ дюйма}$$

Переведем полученную длину диаметра в сантиметры:

$$2,63 \times 2,54 \approx 6,68 \text{ см}$$

Рассчитаем, на сколько увеличился радиус обруча:

$$\frac{(C_{\text{бол}} + l)}{2\pi} - R = R + \frac{l}{2\pi} - R = \frac{l}{2\pi} = \frac{43}{2 \times 3,14} = 6,85 \text{ см}$$

а) в случае концентрического расположения обруча и шара обруч удален на равное расстояние от шара во всех направления. Значит, величина зазора между обручем и шаром будет равна:

$$\frac{l}{2\pi} = \frac{43}{2 \times 3,14} \approx 6,85 \text{ см}$$

Так как диаметр шара равен 6,85 см, то при данной конфигурации шар пролезет в зазор.

б) в случае, когда обруч касается поверхности шара, величина зазора между шаром и обручем равна

$$\frac{l}{\pi} = 13,7 \text{ см}$$

Так как диаметр шара равен 6,85 см, то при данной конфигурации шар пролезет в зазор.

Ответ.

а) Да

б) Да

Задание №4 (10 баллов)

Решите уравнение $x(x + y) = 11$ в целых числах. В ответ запишите все получившиеся пары чисел: сперва запишите значения x , затем через точку с запятой значения y .

Ответ:

- 1,10
- 11,-10
- -1,-10
- -11,10

Решение:

Разложим число 11 на множители: $11 = 1 \times 11$

Поскольку решить данное уравнение нужно в целых числах, то данное уравнение будет равносильно следующей совокупности систем:

$$\left[\begin{array}{l} \{ x = 1 \\ x + y = 11 \} \\ \{ x = 11 \\ x + y = 1 \} \\ \{ x = -1 \\ x + y = -11 \} \\ \{ x = -11 \\ x + y = -1 \} \end{array} \right.$$

После решения данной совокупности систем линейных уравнений получаем ответ:

$$\left[\begin{array}{l} \{ x = 1 \\ y = 10 \} \\ \{ x = 11 \\ y = -10 \} \\ \{ x = -1 \\ y = -10 \} \\ \{ x = -11 \\ y = 10 \} \end{array} \right.$$

Ответ:

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор теоретических заданий по математике 8-9 класс

- 1,10
- 11,-10
- -1,-10
- -11,10

Задание №5 (16 баллов)

Проведите статистический анализ дискретного ряда значений. В качестве значений возьмите *количество букв в словах*, входящих в следующий отрывок из стихотворения Александра Сергеевича Пушкина:

Зима! Крестьянин, торжествуя,
На дровнях обновляет путь;
Его лошадка, снег почуя,
Плетется рысью как-нибудь;
Бразды пушистые взрывая,
Летит кибитка удалая;
Ямщик сидит на облучке
В тулупе, в красном кушаке.

В ответе укажите:

- А) Среднее ряда;
- Б) Размах ряда;
- В) Медиану ряда;
- Г) Моду ряда.

При необходимости результаты округлите до десятых.

Ответ:

- А) 5,7
- Б) 9

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор теоретических заданий по математике 8-9 класс

В) 6

Г) 7

Решение:

Запишем ряд, которому соответствует количество букв в словах стихотворения:

4, 10, 10, 2, 7, 9, 4, 3, 7, 4, 5, 8, 5, 9, 6, 8, 7, 5, 7, 6, 5, 5, 2, 7, 1, 6, 1, 7, 6

Упорядочим ряд по возрастанию:

1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10

Проведем частотный анализ ряда:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	1	3	5	4	6	2	2	2

А) Подсчитаем среднее ряда:

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 1 + 4 \times 3 + 5 \times 5 + 6 \times 4 + 7 \times 6 + 8 \times 2 + 9 \times 2 + 10 \times 2 \\ & \frac{2 + 2 + 1 + 3 + 5 + 4 + 6 + 2 + 2 + 2}{9 + 12 + 25 + 24 + 42 + 16 + 18 + 20} = \frac{21 + 24 + 25 + 60 + 36}{8 + 9 + 12} = \\ & = \frac{70 + 36 + 60}{29} = \frac{166}{29} \approx 5,7; \end{aligned}$$

Б) Размах ряда равен $10 - 1 = 9$;

В) Медиана ряда равна 6;

Г) Мода ряда равна 7.

Ответ:

А) 5,7

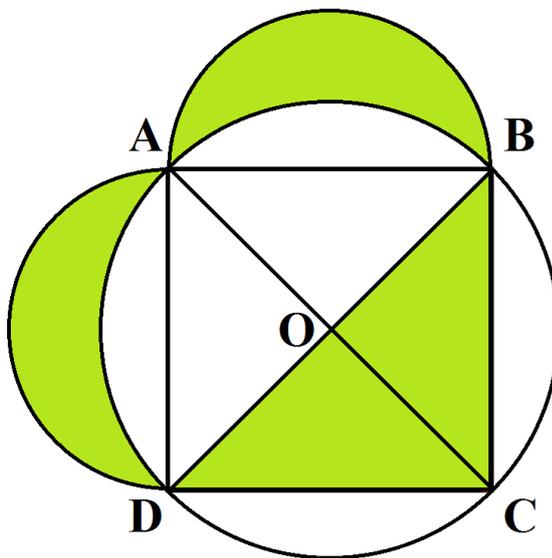
Б) 9

В) 6

Г) 7

Задание №6 (20 баллов)

Вокруг квадрата ABCD описана окружность. На сторонах квадрата AB и AD как на диаметрах построены полуокружности. Длина отрезка AO равна $2\sqrt{2}$ см. Определите, чему равна площадь закрашенной части фигуры (См. рисунок). $\pi \approx 3.14$. При необходимости, ответ округлите до десятых.



Ответ: 16 см^2

Решение:

Закрашенная фигура состоит из частей двух типов – из двух треугольников и двух фигур, называемых «Луночки Гиппократы». Можно доказать, что площадь четырех таких луночек будет равна площади квадрата ABCD.

Соответственно, площадь двух треугольников и двух луночек Гиппократы будет равна площади квадрата ABCD.

Длина отрезка $AC = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ см

Поскольку ABCD – квадрат, а, следовательно, и ромб, то его площадь равна:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 16 \text{ см}^2$$

Ответ: 16 см^2

Задание №7 (15 баллов)

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор теоретических заданий по математике 8-9 класс

Сумма квадрата полусуммы двух чисел и квадрата полуразности этих же чисел равна 212. Разность квадрата полусуммы этих же чисел и квадрата полуразности этих чисел равна 180. Определите чему равно:

- 1) среднее арифметическое этих чисел;
- 2) среднее геометрическое этих чисел;
- 3) сумма чисел, обратным к этим числам.

Ответы округлите до сотых.

Ответы:

- 1) 14 или -14
- 2) 13,42
- 3) 0,16 или -0,16

Решение:

Запишем, что нам дано:

$$\begin{cases} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 212 & (1) \\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 180 & (2) \end{cases}$$

Определим, что нужно найти:

$$\frac{a+b}{2}$$

Сложим строки (1) и (2) и выразим искомую величину:

$$2 \times \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 392$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 196$$

$$\frac{a+b}{2} = 14 \text{ или } \frac{a+b}{2} = -14$$

Определим среднее геометрическое чисел:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 180$$

$$\frac{1}{4}(a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2) = 180$$

$$\frac{1}{4}(4ab) = 180$$

$$ab = 180$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{180} = \sqrt{4 \times 5 \times 9} = 6\sqrt{5} \approx 13,42$$

Найдем сумму чисел, обратных к этим числам:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{a+b}{2} \times \frac{2}{(\sqrt{ab})^2}$$

Если $\frac{a+b}{2} = 14$, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{a+b}{2} \times \frac{2}{(\sqrt{ab})^2} = 14 \times \frac{2}{180} = \frac{7}{45} \approx 0,16$$

Если $\frac{a+b}{2} = -14$, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{a+b}{2} \times \frac{2}{(\sqrt{ab})^2} = -14 \times \frac{2}{180} = -\frac{7}{45} \approx -0,16$$

Ответы:

1) 14 или -14

2) 13,42

3) 0,16 или -0,16

Задание №8 (19 баллов)

Решите систему уравнений. Запишите в ответ все пары корней, сперва значения x , затем через точку с запятой значения y .

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 8y = 2xy + 4y - 8x - 11 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор теоретических заданий по математике 8-9 класс

Ответ:

- 2;3
- -3;8

Решение:

Упростим первое уравнение:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + 4x - 8y &= 2xy + 4y - 8x - 11 \\x^2 - 2xy + y^2 + 8x + 4x - 8y - 4y + 11 &= 0 \\(x - y)^2 + 12(x - y) + 11 &= 0\end{aligned}$$

Решим уравнение относительно $z = x - y$:

$$z^2 + 12z + 11 = 0$$

Получим

$$z_1 = -11 \text{ и } z_2 = -1$$

Тогда наша система будет равносильна следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x - y = -11 \\ x + y = 5 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x - y = -1 \\ x + y = 5 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Далее мы получаем ответ:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x = -3 \\ y = 8 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 3 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ответ:

- 2;3
- -3;8