

Вариант 1

Задание №1 (5 баллов)

Укажите все двузначные натуральные числа такие, что

$$\sqrt{ab} = a + \sqrt{b}$$

Ответ:

- 49
- 64
- 81

Решение:

Мы знаем, что число \underline{ab} – это квадратное число. Соответственно, поскольку по условию число двузначное, то $a \neq 0$.

Проще всего решить данную задачу методом перебора.

Выпишем все двухзначные квадратные числа – 16, 25, 36, 49, 64 и 81 и проверим, какие из них соответствуют заданному условию.

После проверки у нас получится, что решением являются числа 49, 64, 81.

Ответ: 49, 64, 81

Задание №2 (5 баллов)

Представьте число 2019 в виде $a^b + b^a$, a и b – натуральные. В ответ запишите все получившиеся пары чисел: сперва запишите значения a , затем через точку с запятой значения b .

Ответ:

- 2018;1
- 1;2018

Решение:

Нам нужно решить в натуральных числах уравнение

$$a^b + b^a = 2019$$

Рассмотрим случаи, когда $a=1$:

$$1^b + b^1 = 2019$$

$$1 + b = 2019$$

$$b = 2018$$

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор заданий по математике 10-11 класс

Аналогично и для $b=1$.

Получаем два решения 1; 2018 и 2018;1

Рассмотрим при $a=2, b>4$:

$$2^b + b^2 = 2019$$

Так как 2019 – нечетное, то b -нечетное, т.е $b = 2n+1$, где n - натуральное, $n>1$

$$2^{2n+1} + (2n + 1)^2 = 2019$$

$$4 \times 2^{2n-1} + 4n^2 + 4n + 1 = 2019$$

$$4 \times 2^{2n-1} + 4n^2 + 4n = 2018$$

$$2^{2n-1} + n^2 + n = 2018 \div 4$$

$$2^{2n-1} + n^2 + n = 504,5 \text{ не целое.}$$

Мы пришли к противоречию.

Аналогично и для $b=2, a>4$

В случае если a – нечетное ($a>2$), то b – четное. И мы снова сможем повторить аналогичные рассуждения.

Таким образом, у нас есть два решения:

Ответ:

- 2018;1
- 1;2018

Задание №3 (10 баллов)

Шар радиуса $R=21$ см стянут по экватору крепким нерастяжимым обручем, плотно прилегающим к поверхности шара.

Длину обруча увеличили на 60 сантиметров. Определите, пройдет ли в образовавшийся зазор хорошо накаченный мяч, длина окружности которого равна 30,7 дюймам. Масса мяча 0,6 кг. Примите $\pi \approx 3,14$, 1 дюйм = 2,54 см.

а) в случае концентрического расположения обруча и шара;

б) в случае, когда обруч касается поверхности шара.

Ответ:

а) Нет

б) Нет

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор заданий по математике 10-11 класс

Решение:

Чтобы в зазор между обручем и шаром прошел мяч, нужно, чтобы величина зазора была не меньше диаметра шара.

Рассчитаем диаметр шара:

$$D = C : \pi = 30,7 : 3,14 \approx 9,78 \text{ дюймов}$$

Переведем полученную величину диаметра в сантиметры:

$$9,78 \times 2,54 \approx 24,73 \text{ см}$$

Рассчитаем, на сколько увеличился радиус обруча:

$$\frac{(C_{\text{бол}} + l)}{2\pi} - R = R + \frac{l}{2\pi} - R = \frac{l}{2\pi} = \frac{60}{2 \times 3,14} = 30 : 3,14 \approx 9,55 \text{ см}$$

Тогда диаметр обруча увеличился на

$$2 \times 9,55 \approx 19,11 \text{ см}$$

а) в случае концентрического расположения обруча и шара обруч удален на равное расстояние от шара во всех направления. Значит, величина зазора между обручем и шаром будет равна:

$$\frac{l}{2\pi} \approx 9,55 \text{ см}$$

Так как диаметр шара равен 24,73 см, то при данной конфигурации шар не пролезет в зазор.

б) в случае, когда обруч касается поверхности шара, величина зазора между шаром и обручем равна

$$\frac{l}{\pi} \approx 19,11 \text{ см}$$

Так как диаметр шара равен 24,73 см, то при данной конфигурации шар не пролезет в зазор.

Ответ. а) Нет; б) Нет

Задание №4 (10 баллов)

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор заданий по математике 10-11 класс

Решите в целых числах уравнение $x^2 - xy + y^2 = x + y$. В ответ запишите все получившиеся пары чисел: сперва запишите значения x , затем, через точку с запятой, значения y .

Ответ:

- 1;2
- 0;0
- 1;0
- 0;1
- 2;1
- 2;2

Решение

Обозначим $t = x + y$.

Так как

$$x^2 - xy + y^2 \geq \frac{1}{4}(x + y)^2$$

то должно выполняться неравенство

$$t \geq \frac{1}{4}(x + y)^2$$

откуда $0 \leq t \leq 4$.

Учитывая соотношение $x + y = (x + y)^2 - 3xy$, рассмотрим случаи, соответствующие целочисленным значениям, удовлетворяющим условию $0 \leq t \leq 4$.

При $t = 0$

$$\{x + y = 0 \quad xy = 0\} \Leftrightarrow \{x = 0 \quad y = 0\}$$

При $t = 1$

$$\{x + y = 1 \quad xy = 0\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad y = 1 \\ x = 1 \quad y = 0 \end{cases}$$

При $t = 2$

$$\{x + y = 2 \quad xy = \frac{2}{3}\}$$

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор заданий по математике 10-11 класс

В этом случае получаются не целочисленные значения. Значит, данные значения нам не подходят по условию.

При $t = 3$

$$\{x + y = 3 \quad xy = 2\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & y = 2 \\ x = 2 & y = 1 \end{cases}$$

При $t = 4$

$$\{x + y = 4 \quad xy = 4\} \Leftrightarrow \{x = 2 \quad y = 2\}$$

Ответ:

- 1;2
- 0;0
- 1;0
- 0;1
- 2;1
- 2;2

Задание №5 (15 баллов)

Проведите статистический анализ дискретного ряда значений. В качестве значений возьмите *количество букв в словах*, входящих в следующее стихотворение Самуила Яковлевича Маршака «Маленькие феи»:

Три очень милых феечки
Сидели на скамеечке
И, съев по булке с маслицем,
Успели так замаслиться,
Что мыли этих феечек
Из трех садовых леечек.

В ответе укажите:

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор заданий по математике 10-11 класс

- А) Среднее ряда;
- Б) Размах ряда;
- В) Медиану ряда;
- Г) Моду ряда.

При необходимости результаты округлите до десятых.

Ответ:

- А) 4,7
- Б) 10
- В) 4,5
- Г) 6

Решение:

Запишем ряд, которому соответствует количество букв в словах стихотворения:

3 5 5 6 6 2 9 1 4 2 5 1 8 6 3 11 3 4 4 6 2 4 7 6

Упорядочим ряд по возрастанию:

1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 6 6 6 6 6 7 8 9 11

Проведем частотный анализ ряда:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	3	4	3	5	1	1	1	0	1

А) Подсчитаем среднее ряда:

$$\begin{aligned} & \frac{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + 5 \times 3 + 6 \times 5 + 7 \times 1 + 8 \times 1 + 9 \times 1 + 11 \times 1}{24} \\ &= \frac{2 + 3 + 3 + 4 + 3 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1}{2 + 6 + 9 + 16 + 15 + 30 + 7 + 8 + 9 + 11} \\ &= \frac{17 + 16 + 15 + 30 + 15 + 20}{24} = \frac{33 + 80}{24} = \frac{113}{24} \approx 4,7; \end{aligned}$$

Б) Размах ряда равен $11 - 1 = 10$;

В) Медиана ряда равна $(4+5) : 2 = 4,5$;

Г) Мода ряда равна 6.

Ответ:

А) 4,7

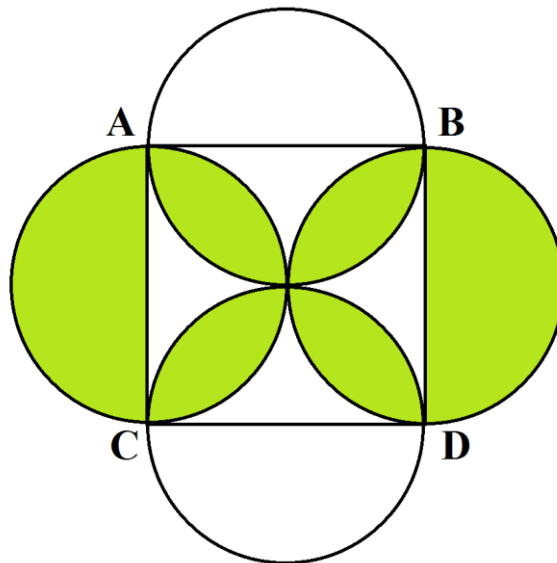
Б) 10

В) 4,5

Г) 6

Задание №6 (15 баллов)

Вокруг квадрата описана окружность. На сторонах квадрата ABCD как на диаметрах построены окружности. Длина стороны квадрата равна 8 см. Определите, чему равна площадь закрашенной части фигуры (См. рисунок). $\pi \approx 3.14$ Ответ округлите до сотых.



Ответ: 86,72

Решение

Закрашенная фигура состоит из двух частей: круга и четырех «лепестков».

Данные четыре «лепестка» получаются путем вычитания из квадрата удвоенной разности площадей квадрата и круга, вписанного в данный квадрат.

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор заданий по математике 10-11 класс

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{круга}} + S_{\text{квадрата}} - 2 \times (S_{\text{квадрата}} - S_{\text{круга}}) = 3S_{\text{круга}} - S_{\text{квадрата}} = \frac{3}{4}\pi a^2 - a^2 = \\ &= a^2\left(\frac{3}{4}\pi - 1\right) = 64 \times \left(\frac{3}{4} \times 3,14 - 1\right) = 86,72 \text{ см} \end{aligned}$$

Ответ: 86,72 см²

Задание №7 (10 баллов)

Дано квадратное уравнение:

$$3x^2 + 2x - 4 = 0$$

Составьте новое квадратное уравнение, каждый из корней которого будет больше на 3 корней исходного уравнения.

В ответе укажите минимальные целочисленные коэффициенты уравнения в порядке убывания степеней, при которых данные коэффициенты расположены.

Ответ: 3,-16, 17

Решение:

Заменим в данном уравнении x на $y - 3$:

$$3(y - 3)^2 + 2(y - 3) - 4 = 0$$

$$3(y^2 - 6y + 9) + 2y - 6 - 4 = 0$$

$$3y^2 - 18y + 27 + 2y - 10 = 0$$

$$3y^2 - 16y + 17 = 0$$

Ответ: 3,-16, 17

Задание №8 (20 баллов)

Решите систему уравнений. В ответ запишите все получившиеся пары чисел: сперва запишите значения x , затем через точку с запятой значения y .

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 5(xy + 14) \\ 2x(y + 1) = y - 4 \end{cases}$$

Ответ:

- 1;-6
- 3;-2

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор заданий по математике 10-11 класс

- -4,5;-0,5,
- 0,25;9

Решение:

$$\{4x^2 + y^2 = 5(xy + 14) \quad 2x(y + 1) = y - 4 \Leftrightarrow \{4x^2 + y^2 - 5xy = 70 \quad 2xy + 2x = y - 4 \Leftrightarrow$$

$$\{4x^2 - 4xy + y^2 - xy = 70 \quad 2xy + 2x - y = -4 \Leftrightarrow \{(2x - y)^2 - xy = 70 \quad 2xy + (2x - y) = -4$$

Сделаем замену:

$$u = 2x - y \text{ и } v = xy$$

$$\{u^2 - v = 70 \quad 2v + u = -4 \Leftrightarrow \{u^2 - 70 = v \quad 2(u^2 - 70) + u = -4$$

Решим квадратное уравнение:

$$2u^2 + u - 136 = 0$$

$$D^2 = 1 + 4 \times 2 \times 136 = 1089$$

$$u_1 = \frac{-1 - 33}{4} = \frac{-34}{4} = -\frac{17}{2} = -8,5$$

$$u_2 = \frac{-1 + 33}{4} = 8$$

Решим совокупность систем:

$$\{u = -8,5 \quad v = (-8,5)^2 - 70 \quad \{u = 8 \quad v = (8)^2 - 70 \Leftrightarrow \{u = -8,5 \quad v = 2,25 \quad \{u = 8 \quad v = -6$$

Сделаем обратную замену

$$\{2x - y = -8,5 \quad xy = 2,25 \quad \{2x - y = 8 \quad xy = -6 \Leftrightarrow \{y = 2x + 8,5 \quad x(2x + 8,5) = 2,25 \quad \{y = 2x - 8 \quad x(2x - 8) = -6 \Leftrightarrow \{y = 2x + 8,5 \quad 8x^2 + 34x - 9 = 0 \quad \{y = 2x - 8 \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

Решим первое квадратное уравнение:

$$8x^2 + 34x - 9 = 0$$

$$\frac{D^2}{4} = 289 + 8 \times 9 = 361$$

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор заданий по математике 10-11 класс

$$x_1 = \frac{-17 - 19}{8} = -4,5 \text{ или } x_2 = \frac{-17 + 19}{8} = 0,25$$

Решим второе квадратное уравнение:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\frac{D^2}{4} = 4 - 1 \times 3 = 1$$

$$x_3 = \frac{2 - 1}{1} = 1 \text{ или } x_4 = \frac{2 + 1}{1} = 3$$

Решим следующую совокупность систем:

$$\begin{aligned} \{ \{ x = -4,5 \quad y = 2x + 8,5 \} \quad \{ x = 0,25 \quad y = 2x + 8,5 \} \quad \{ x = 1 \quad y = 2x - 8 \} \quad \{ x = 3 \quad y = 2x - 8 \} \\ \{ x = -4,5 \quad y = -0,5 \} \quad \{ x = 0,25 \quad y = 9 \} \quad \{ x = 1 \quad y = -6 \} \quad \{ x = 3 \quad y = -2 \} \end{aligned}$$

Ответ:

- 1;-6
- 3;-2
- -4,5;-0,5,
- 0,25;9

Вариант 2

Задание №1 (5 баллов)

Укажите все двузначные натуральные числа такие, что

$$\sqrt{ab} = a + \sqrt{b}$$

Ответ:

- 49
- 64
- 81

Решение:

Мы знаем, что число ab – это квадратное число. Соответственно, поскольку по условию число двузначное, то $a \neq 0$.

Проще всего решить данную задачу методом перебора.

Выпишем все двузначные квадратные числа – 16, 25, 36, 49, 64 и 81 и проверим, какие из них соответствуют заданному условию.

После проверки у нас получится, что решением являются числа 49,64,81.

Ответ: 49,64,81

Задание №2 (5 баллов)

Представьте число 2019 в виде $a^b + b^a$, a и b – натуральные.

В ответ запишите все получившиеся пары чисел: сперва запишите значения a , затем через точку с запятой значения b .

Ответ:

- 2018;1
- 1;2018

Решение:

Нам нужно решить в натуральных числах уравнение

$$a^b + b^a = 2019$$

Рассмотрим случаи, когда $a=1$:

$$1^b + b^1 = 2019$$

$$1 + b = 2019$$

$$b = 2018$$

Аналогично и для $b=1$.

Получаем два решения 1; 2018 и 2018;1

Рассмотрим при $a=2, b>4$:

$$2^b + b^2 = 2019$$

Так как 2019 – нечетное, то b -нечетное, т.е. $b = 2n+1$, где n - натуральное, $n>1$

$$2^{2n+1} + (2n + 1)^2 = 2019$$

$$4 \times 2^{2n-1} + 4n^2 + 4n + 1 = 2019$$

$$4 \times 2^{2n-1} + 4n^2 + 4n = 2018$$

$$2^{2n-1} + n^2 + n = 2018 \div 4$$

$$2^{2n-1} + n^2 + n = 504,5 \text{ не целое.}$$

Мы пришли к противоречию.

Аналогично и для $b=2, a>4$

В случае если a – нечетное ($a>2$), то b – четное. И мы снова сможем повторить аналогичные рассуждения.

Таким образом, у нас есть два решения:

Ответ:

- 2018;1
- 1;2018

Задание №3 (10 баллов)

Шар радиуса $R=50$ см стянут по экватору крепким нерастяжимым обручем, плотно прилегающим к поверхности шара.

Длину обруча увеличили на 20 сантиметров. Определите, пройдет ли в образовавшийся зазор хорошо накаченный мяч, длина окружности которого равна 2,47 дюйма. Масса мяча 0,0027 кг. Примите $\pi \approx 3,14$, 1 дюйм = 2,54 см.

а) в случае концентрического расположения обруча и шара;

б) в случае, когда обруч касается поверхности шара.

Ответ. а) Да; б) Да

Решение:

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор заданий по математике 10-11 класс

Чтобы в зазор между обручем и шаром прошел мяч, нужно, чтобы величина зазора была не меньше диаметра шара.

Рассчитаем диаметр шара:

$$D = C : \pi = 2,47 : 3,14 \approx 0,79 \text{ дюймов}$$

Переведем полученную величину диаметра в сантиметры:

$$0,79 \times 2,54 \approx 2,00 \text{ см}$$

Рассчитаем, на сколько увеличился радиус обруча:

$$\frac{(C_{\text{бол}} + l)}{2\pi} - R = R + \frac{l}{2\pi} - R = \frac{l}{2\pi} = \frac{20}{2 \times 3,14} = 10 : 3,14 \approx 3,18 \text{ см}$$

Тогда диаметр обруча увеличился на

$$2 \times 3,18 \approx 6,37 \text{ см}$$

а) в случае концентрического расположения обруча и шара обруч удален на равное расстояние от шара во всех направления. Значит, величина зазора между обручем и шаром будет равна:

$$\frac{l}{2\pi} \approx 3,18 \text{ см}$$

Так как диаметр шара равен 2,00 см, то при данной конфигурации шар пролезет в зазор.

б) в случае, когда обруч касается поверхности шара, величина зазора между шаром и обручем равна

$$\frac{l}{\pi} \approx 6,37 \text{ см}$$

Так как диаметр шара равен 2,00 см, то при данной конфигурации шар пролезет в зазор.

Ответ. а) Да; б) Да

Задание №4 (10 баллов)

Решите в целых числах уравнение $3x^2 - 20xy - 7y^2 = 15$

Ответ:

- -1;2
- 1;-2

Решение:

Разложим левую часть уравнения $3x^2 - 20xy - 7y^2 = 15$ на множители:

$$3x^2 - 20xy - 7y^2 = (3x + y)(x - 7y)$$

Получаем следующее уравнение:

$$(3x + y)(x - 7y) = 15$$

Поскольку число 15 можно представить в виде произведения целых чисел с учетом порядка восьмью способами: $15 = 1 \times 15 = 15 \times 1 = (-1) \times (-15) = (-15) \times (-1) = 3 \times 5 = 5 \times 3 = (-3) \times (-5) = (-5) \times (-3)$, то получаем совокупность четырех систем для нахождения значений переменных:

$$\begin{aligned} \{ \begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - 7y = 15 \end{cases} & \{ \begin{cases} 3x + y = 15 \\ x - 7y = 1 \end{cases} & \{ \begin{cases} 3x + y = -1 \\ x - 7y = -15 \end{cases} & \{ \begin{cases} 3x + y = -15 \\ x - 7y = -1 \end{cases} \\ \{ \begin{cases} 3x + y = 3 \\ x - 7y = 5 \end{cases} & \{ \begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 7y = 3 \end{cases} & \{ \begin{cases} 3x + y = -3 \\ x - 7y = -5 \end{cases} & \{ \begin{cases} 3x + y = -5 \\ x - 7y = -3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \{ \begin{cases} 22y = -44 \\ x = 7y + 15 \end{cases} & \{ \begin{cases} 22y = 12 \\ x = 7y + 1 \end{cases} & \{ \begin{cases} 22y = -44 \\ x = 7y - 15 \end{cases} & \{ \begin{cases} 22y = -12 \\ x = 7y - 1 \end{cases} \\ \{ \begin{cases} 22y = 44 \\ x = 7y - 15 \end{cases} & \{ \begin{cases} 22y = -12 \\ x = 7y - 1 \end{cases} & \{ \begin{cases} 22y = -44 \\ x = 7y + 3 \end{cases} & \{ \begin{cases} 22y = 12 \\ x = 7y - 5 \end{cases} & \{ \begin{cases} 22y = 44 \\ x = 7y + 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \{ \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases} & \{ \begin{cases} y = \frac{6}{11} \\ x = 7y + 1 \end{cases} & \{ \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases} & \{ \begin{cases} y = -\frac{6}{11} \\ x = 7y - 1 \end{cases} & \{ \begin{cases} y = -\frac{6}{11} \\ x = 7y + 5 \end{cases} & \{ \begin{cases} y = -\frac{2}{11} \\ x = 7y + 3 \end{cases} & \{ \begin{cases} y = \frac{6}{11} \\ x = 7y - 5 \end{cases} & \{ \begin{cases} y = \frac{2}{11} \\ x = 7y - 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку мы должны решить данное уравнение в целых числах, то нам подходят только два решения.

Ответ:

- -1;2
- 1;-2

Задание №5 (15 баллов)

Проведите статистический анализ дискретного ряда значений. В качестве значений возьмите *количество букв в словах*, входящих в следующее стихотворение Самуила Яковлевича Маршака «Маленькие феи»:

Три очень милых феечки

Сидели на скамеечке

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор заданий по математике 10-11 класс

И, съев по булке с маслицем,
Успели так замаслиться,
Что мыли этих феечек
Из трех садовых леечек.

В ответе укажите:

- А) Среднее ряда;
- Б) Размах ряда;
- В) Медиану ряда;
- Г) Моду ряда.

При необходимости результаты округлите до десятых.

Ответ:

- А) 4,7
- Б) 10
- В) 4,5
- Г) 6

Решение:

Запишем ряд, которому соответствует количество букв в словах стихотворения:

3 5 5 6 6 2 9 1 4 2 5 1 8 6 3 11 3 4 4 6 2 4 7 6

Упорядочим ряд по возрастанию:

1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 6 6 6 6 6 7 8 9 11

Проведем частотный анализ ряда:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	3	4	3	5	1	1	1	0	1

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор заданий по математике 10-11 класс

А) Подсчитаем среднее ряда:

$$\begin{aligned} & \frac{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + 5 \times 3 + 6 \times 5 + 7 \times 1 + 8 \times 1 + 9 \times 1 + 11 \times 1}{2 + 3 + 3 + 4 + 3 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1} \\ &= \frac{2 + 6 + 9 + 16 + 15 + 30 + 7 + 8 + 9 + 11}{24} \\ &= \frac{17 + 16 + 15 + 30 + 15 + 20}{24} = \frac{33 + 80}{24} = \frac{113}{24} \approx 4,7; \end{aligned}$$

Б) Размах ряда равен $11 - 1 = 10$;

В) Медиана ряда равна $(4 + 5) : 2 = 4,5$;

Г) Мода ряда равна 6.

Ответ:

А) 4,7

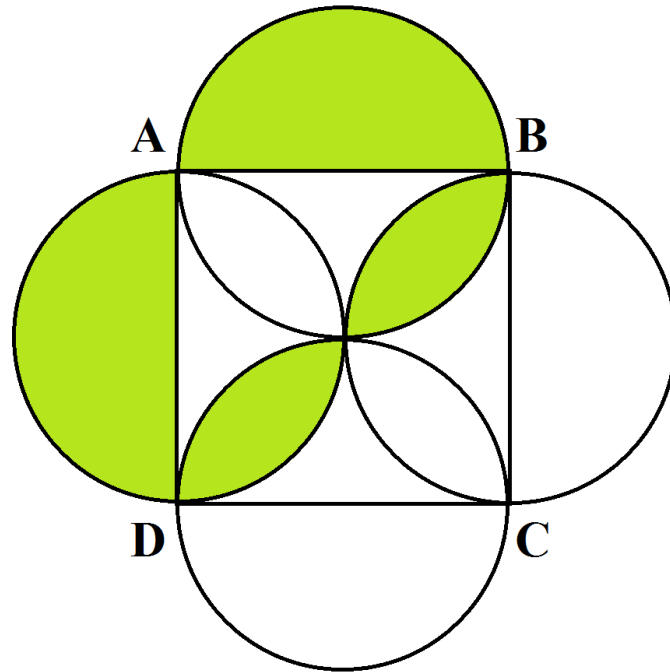
Б) 10

В) 4,5

Г) 6

Задание №6 (15 баллов)

Вокруг квадрата описана окружность. На сторонах квадрата ABCD как на диаметрах построены окружности. Длина стороны квадрата равна 6 см. Определите, чему равна площадь закрашенной части фигуры (См. рисунок). $\pi \approx 3.14$ Ответ округлите до сотых.



Ответ: 38,52

Закрашенная фигура состоит из двух частей: круга и двух «лепестков».

Данные четыре «лепестка» получаются путем вычитания из квадрата удвоенной разности площадей квадрата и круга, вписанного в данный квадрат. Соответственно, два «лепестка» будут иметь площадь в два раза меньшую, чем четыре «лепестка»:

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{круга}} + \frac{1}{2} (S_{\text{квадрата}} - 2 \times (S_{\text{квадрата}} - S_{\text{круга}})) = 2S_{\text{круга}} - \frac{1}{2} S_{\text{квадрата}} \\ &= \frac{1}{2} \pi a^2 - \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} a^2 (\pi - 1) = \frac{1}{2} \times 36 \times (3,14 - 1) = 18 \times (\pi - 1) \\ &= 38,52 \text{ см}^2 \end{aligned}$$

Ответ: 38,52 см²

Задание №7 (10 баллов)

Дано квадратное уравнение:

$$2x^2 + x - 5 = 0$$

Составьте новое квадратное уравнение, каждый из корней которого будет больше на 2 корней исходного уравнения.

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор заданий по математике 10-11 класс

В ответе укажите минимальные целочисленные коэффициенты уравнения в порядке убывания степеней, при которых данные коэффициенты расположены.

Ответ: 2, -7, 1

Решение:

Заменим в данном уравнении x на $y - 2$:

$$2(y - 2)^2 + (y - 2) - 5 = 0$$

$$2(y^2 - 4y + 4) + y - 2 - 5 = 0$$

$$2y^2 - 8y + 8 + y - 7 = 0$$

$$2y^2 - 7y + 1 = 0$$

Ответ: 2, -7, 1

Задание №8 (19 баллов)

Решите систему уравнений. В ответ запишите все получившиеся пары чисел: сперва запишите значения x , затем, через точку с запятой, значения y .

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 5(xy + 14) \\ 2x(y + 1) = y - 4 \end{cases}$$

Ответ:

- 1;-6
- 3;-2
- -4,5;-0,5,
- 0,25;9

Решение:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 5(xy + 14) \\ 2x(y + 1) = y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 - 5xy = 70 \\ 2xy + 2x = y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 4xy + y^2 - xy = 70 \\ 2xy + 2x - y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y)^2 - xy = 70 \\ 2xy + (2x - y) = -4 \end{cases}$$

Сделаем замену:

$$u = 2x - y \text{ и } v = xy$$

$$\begin{cases} u^2 - v = 70 \\ 2v + u = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - 70 = v \\ 2(u^2 - 70) + u = -4 \end{cases}$$

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор заданий по математике 10-11 класс

Решим квадратное уравнение:

$$2u^2 + u - 136 = 0$$

$$D^2 = 1 + 4 \times 2 \times 136 = 1089$$

$$u_1 = \frac{-1 - 33}{4} = \frac{-34}{4} = -\frac{17}{2} = -8,5$$

$$u_2 = \frac{-1 + 33}{4} = 8$$

Решим совокупность систем:

$$\{u = -8,5 \ v = (-8,5)^2 - 70\} \ \{u = 8 \ v = (8)^2 - 70\} \Leftrightarrow \{u = -8,5 \ v = 2,25\} \ \{u = 8 \ v = -6\}$$

Сделаем обратную замену

$$\{2x - y = -8,5 \ xy = 2,25\} \ \{2x - y = 8 \ xy = -6\} \Leftrightarrow \{y = 2x + 8,5 \ x(2x + 8,5) = 2,25\} \ \{y = 2x - 8 \ x(2x - 8) = -6\} \Leftrightarrow \{y = 2x + 8,5 \ 8x^2 + 34x - 9 = 0\} \ \{y = 2x - 8 \ x^2 - 4x + 3 = 0\}$$

Решим первое квадратное уравнение:

$$8x^2 + 34x - 9 = 0$$

$$\frac{D^2}{4} = 289 + 8 \times 9 = 361$$

$$x_1 = \frac{-17 - 19}{8} = -4,5 \text{ или } x_2 = \frac{-17 + 19}{8} = 0,25$$

Решим второе квадратное уравнение:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\frac{D^2}{4} = 4 - 1 \times 3 = 1$$

$$x_3 = \frac{2 - 1}{1} = 1 \text{ или } x_4 = \frac{2 + 1}{1} = 3$$

Решим следующую совокупность систем:

$$\{x = -4,5 \ y = 2x + 8,5\} \ \{x = 0,25 \ y = 2x + 8,5\} \ \{x = 1 \ y = 2x - 8\} \ \{x = 3 \ y = 2x - 8\} \Leftrightarrow \{x = -4,5 \ y = -0,5\} \ \{x = 0,25 \ y = 9\} \ \{x = 1 \ y = -6\} \ \{x = 3 \ y = -2\}$$

Московская предпрофессиональная олимпиада школьников
Отборочный (дистанционный) этап
Разбор заданий по математике 10-11 класс

Ответ:

- 1;-6
- 3;-2
- -4,5;-0,5,
- 0,25;9