9 класс

1. *Ответ*. Да, существует.

Решение. Например, подходит число

$$121234345656797980 80.$$

Поскольку $2020 = 101 \cdot 20$, а числа 101 и 20 взаимно простые, достаточно отдельно убедиться в делимости приведённого числа на 20 и на 101. Ясно, что на 20 оно делится.

Чтобы показать, что оно также делится на 101, можно заметить, что любое число вида $\overline{a0a00\ldots0}$ делится на 101, а наше число представляется в виде суммы чисел такого вида.

Комментарий. Перечислим и некоторые другие идеи, которые могут привести к решению.

Заметив, что $1111 \,\vdots\, 101$, можно прийти к таким ответам, как 11112222333...99990000.

Обнаружив, что $10^{10} + 1 \,\vdots\, 101$, можно получить числа вида 12345679801234567980.

Также есть примеры, в которых каждая цифра повторяется по одному разу, такие как 1237548960. В подборе этих чисел может помочь признак делимости на 101, который аналогичен признаку делимости на 11: если разбить запись числа на блоки по две цифры (начиная с конца), то знакопеременная сумма полученных двузначных чисел должна быть кратна 101 (например, $12 - 37 + 54 - 89 + 60 = 0 \,\vdots\, 101$).

2. *Ответ*. Да, всегда.

Решение. Рассмотрим два треугольника, образованных такими шестью палочками. Упорядочим длины сторон первого треугольника и обозначим их через $A > B > C$; длины сторон второго аналогично обозначим через $a > b > c$; также без ограничения общности считаем, что самая длинная палочка оказалась в первом треугольнике, то есть $A > a$. Из неравенства треугольника следует, что $A < B + C$ и $a < b + c$.

Тогда возьмём в качестве сторон искомого треугольника A, $B + a$, $C + b + c$. Осталось проверить, что выполнены все три неравенства треугольника:

$$A < B + C < (B + a) + (C + b + c);$$
$$B + a < A + (b + c) < A + (C + b + c);$$
$$C + b + c < B + a + a < B + A + a = A + (B + a).$$

Комментарий. Существуют и другие способы получить требуемый треугольник. Например, если упорядочить длины всех шести палочек в порядке убывания $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6$, то можно составить треугольник со сторонами a_1, $a_2 + a_4$, $a_3 + a_5 + a_6$.

3. *Ответ*. Да, смогут.

Решение. Докажем, что богатыри справятся с любым количеством голов Змея, если оно делится на 2 или на 3.

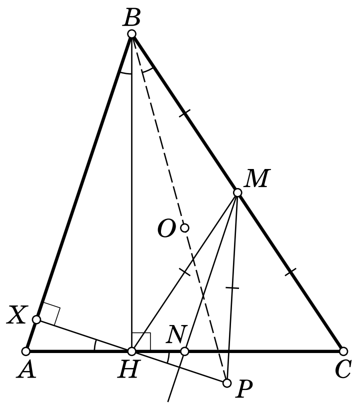
Для этого удостоверимся, что они всегда могут уменьшить количество голов так, чтобы оно снова делилось на 2 или на 3.

Если количество голов делится на 4, примем его за $4x$; тогда после удара Алеши Поповича их станет $3x-3$, что будет делиться на 3.

Если количество голов делится на 3, примем его за $3x$; тогда после удара Добрыни Никитича их станет $2x-2$, что будет делиться на 2.

Если же количество голов делится на 2, но не делится на 4, примем его за $4x-2$; тогда после удара Ильи Муромца их станет $2x-2$, что снова будет делиться на 2.

Действуя таким образом, мы сможем каждым ходом уменьшать количество голов, пока не избавимся от них совсем. Поскольку 20^{20} делится на 4, то с таким Змеем богатыри справятся.



4. *Первое решение*. Отметим середины M и N сторон BC и AC соответственно (см. рис.). Заметим, что треугольник BHC — прямоугольный, а точка M — середина его гипотенузы BC. Значит, $MB=MC=MH$. Поскольку точки H и P симметричны относительно прямой MN, то $MH=MP$. Следовательно, точки B, H, P, C лежат на одной окружности с центром в точке M. Отсюда $\angle PBC=\angle PHC$, так как эти углы опираются на одну дугу PC.

Обозначим точку пересечения прямых PH и AB через X. Заметим, что $PH \perp MN$ из-за симметрии точек H и P относительно прямой MN. Кроме того, $MN \parallel AB$ как средняя линия треугольника ABC. Таким образом, $PH \perp AB$. Отсюда следует, что $\angle PBC = \angle PHC = \angle AHX = 90^\circ - \angle BAC$.

С другой стороны, заметим, что если точка O — центр описанной окружности треугольника ABC, то $\angle BOC = 2\angle BAC$ как центральный угол, и из суммы углов равнобедренного треугольника BOC получаем, что $\angle OBC = 90^\circ - \angle BAC$. Имеем $\angle OBC = \angle PBC$, а значит, точки B, O и P действительно лежат на одной прямой.

Второе решение. Воспользуемся теоремой о прямой Штейнера.

Прямая Штейнера. Точки, симметричные произвольной точке L описанной окружности треугольника MNK относительно его сторон, лежат на одной прямой, проходящей через ортоцентр (точку пересечения высот) треугольника MNK.

Несложно заметить, что точка H лежит на окружности, проходящей через середины сторон треугольника ABC (это окружность девяти точек треугольника ABC). По условию точка P симметрична точке H относительно средней линии, параллельной стороне AB. Заметим, что точка B симметрична точке H относительно средней линии, параллельной стороне AC. Получается, что прямая BP — это прямая Штейнера точки H относительно серединного треугольника (треугольника, образованного серединами сторон треугольника ABC). Тогда на этой прямой лежит ортоцентр серединного треугольника, который и является центром описанной окружности треугольника ABC.

5. *Первое решение.* Разобьём всех гостей на упорядоченные тройки; первому человеку из тройки наденем цилиндр с буквой А, второму — с буквой Б, третьему — с буквой В. Для этого поставим гостей в шеренгу (это можно сделать $(3n)!$ способами), первых трёх объединим в одну тройку, вторых трёх — в другую и т. д. Поскольку тройки можно переставлять внутри шеренги и получать то же самое разбиение на тройки, то каждое разбиение посчитано $n!$ раз. Таким образом, количество способов разбить гостей на упорядоченные тройки равно $(3n)!/n!$.

Теперь для того, чтобы разбить гостей на хороводы, достаточно разбить на хороводы первых n человек из своих троек (эти хороводы могут состоять из одного человека), а затем поставить после каждого человека его тройку, что можно сделать единственным образом. Докажем индукцией по n, что количество способов сделать это равно $n!$, что завершит решение.

База для $n=1$ очевидна. Пусть утверждение верно для n, докажем его для $n+1$. Расставим n человек в хороводы, это можно сделать $n!$ способами. В каждом разбиении на хороводы n человек есть ровно $n+1$ место, куда можно поставить оставшегося человека: в каждом существующем хороводе из k человек таких мест ровно k, а ещё можно выделить этого человека в новый хоровод.

Замечание. Последнее рассуждение можно упростить, если заметить, что каждое разбиение на хороводы соответствует перестановке на множестве из n элементов, представленной в форме циклов, а количество перестановок, как известно, равно $n!$.

Второе решение. Занумеруем людей числами от 1 до $3n$. Есть как раз $(3n)!$ способов расставить этих людей в ряд, поэтому достаточно установить взаимно однозначное соответствие между такими расстановками и разбиениями на хороводы.

Возьмём любую расстановку, наденем всем цилиндры в порядке АБВАБВ...АБВ слева направо. Мысленно разделим людей подряд на n троек. В первый хоровод берём подряд всех людей от начала и до той тройки включительно, где стоит человек с номером 1 (и замыкаем в хоровод); во второй хоровод берём следующие тройки подряд до той включительно, где стоит человек с наименьшим из оставшихся номеров (и замыкаем в хоровод), и так далее.

Обратно, по набору хороводов легко восстановить расстановку: берём хоровод, где стоит человек 1, находим тройку АБВ, в которой он находится, «разрезаем» хоровод сразу за этой тройкой, вытягиваем в линию и ставим в начало расстановки. Далее берём человека с наименьшим номером из оставшихся, находим «его» хоровод, так же разрезаем и подсоединяем к расстановке и т. д.

6. *Ответ*. Да, мог.

Решение. Рассмотрим число N и последовательность, которую Глеб мог выписать на доску. Исходное число a обозначим через a_1, а все последующие через a_2, a_3, ..., a_n. Из условия имеем $N = a_k q_k + a_{k+1}$ при $1 \leqslant k \leqslant n-1$, а также $N = a_n q_n$, где через q_k обозначены неполные частные от делений.

Мы хотим добиться выполнения неравенства
$$\frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N} + \ldots + \frac{a_n}{N} > 100.$$
Как нетрудно видеть, $N < a_k(q_k + 1)$, откуда $a_k/N > 1/(q_k+1)$; кроме того, $a_n/N = 1/q_n$. Следовательно, достаточно добиться выполнения неравенства
$$\frac{1}{q_1+1} + \frac{1}{q_2+1} + \ldots + \frac{1}{q_{n-1}+1} + \frac{1}{q_n} > 100.$$
Покажем, что существуют такие изначальные числа N и a, что при всех $k < n$ выполнено $q_k = k$ и $q_n = n+1$. Если это удастся, то задача будет решена, так как неравенство
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > 100,$$
как известно, верно при достаточно больших n (см. комментарий 1 в конце решения).

Итак, мы выбрали неполные частные, осталось найти подходящие N и a_k. Заметим, что равенство
$$a_k = \frac{N - a_{k+1}}{k}, \tag{1}$$
дополненное неравенством $a_k > a_{k+1}$, эквивалентно тому, что a_{k+1} является остатком от деления N на a_k с неполным частным k.

Сначала выберем $a_n = 1$ и $N = n+1$. Далее определим все a_k по формуле (1), начиная с конца. Часть из полученных чисел, возможно, окажутся рациональными; однако, как легко видеть, если N и все a_k домножить на произвольное число, равенства (1) сохранятся, как и условие последнего деления $N = (n+1)a_n$. Просто домножим N и все a_k на их общий знаменатель, и они станут целыми. Осталось убедиться, что все a_k положительные и что $a_k > a_{k+1}$.

Для этого сначала докажем индукцией по k, что $0 < a_k < N/k$. База $k = n$ очевидна, так как $a_n = N/(n+1)$. Пусть мы доказали для $k+1$, докажем для k. Так как $0 < a_{k+1} < N/k$, то $0 < N - a_{k+1} < N$, а заменяя $N - a_{k+1}$ на ka_k согласно (1), получаем искомое $0 < a_k < N/k$.

Осталось заметить, что при $k < n$

$$a_k = \frac{N - a_{k+1}}{k} > \frac{N - \dfrac{N}{k+1}}{k} = \frac{N}{k+1} > a_{k+1}.$$

Это завершает доказательство того, что полученная последовательность a_k искомая.

Комментарии. 1. Докажем, что для любого натурального d можно выбрать несколько первых членов последовательности $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$, чтобы их сумма была больше d. Например, можно взять первые $2^{2d} - 1$ чисел. Действительно, их можно разбить на $2d$ частей: в первой части число $\frac{1}{2}$, во второй — числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$, в третьей — от $\frac{1}{5}$ до $\frac{1}{8}$ и т. д., то есть в m-й части числа от $\frac{1}{2^{m-1}+1}$ до $\frac{1}{2^m}$. Тогда для каждого m от 1 до $2d$ в m-ю часть попадут 2^{m-1} чисел, и их сумма будет не менее $\frac{1}{2^m} \cdot 2^{m-1} = \frac{1}{2}$, поэтому сумма всех чисел окажется не менее d.

2. Нетрудно видеть, что неполные частные q_k возрастают с ростом k, так как соотношение $a_k q_k + a_{k+1} = N = a_{k+1} q_{k+1} + a_{k+2}$ не может выполняться при $a_k > a_{k+1} > a_{k+2}$ и $q_k \geqslant q_{k+1}$. Аналогично можно показать, что самое последнее частное хотя бы на 2 больше предпоследнего. Отсюда ясно, что используемая выше последовательность q_k в некотором смысле «минимальна».

3. Можно показать, что в качестве общего знаменателя, на который мы домножали полученные в решении числа a_k, чтобы они стали целыми, можно было взять $n!$. Тогда нетрудно вычислить $N = (n+1)!$ и

$$a_k = (n+1)!\,(k-1)!\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-k+1}}{(n+1)!}\right).$$