1. *Ответ.* Да, мог.

Решение. Пусть промежуток между буквами равен 6 см. Тогда Том мог каждой буквой испачкать три доски, рисуя каждую букву с отступом 3 см от края доски. Всего он испачкает 9 досок. А Гек мог каждой цифрой испачкать только две доски, отступая 0,5 см с края доски и оставляя чистую доску в качестве промежутка между буквами. Всего он испачкает 8 досок.

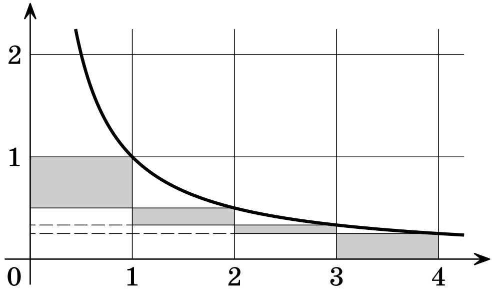
2. *Ответ.* 1.

Решение. Пусть Миша устал, отметив точку с абсциссой n. Посмотрим, как устроена фигура, состоящая из всех точек, закрашенных ровно один раз. На отрезке абсцисс $[i-1, i]$, где $i=1, \ldots, n-1$, это прямоугольник ширины 1 с высотой $h_i=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$. На отрезке $[n-1; n]$ это прямоугольник ширины 1 с высотой $h_n=\frac{1}{n}$. Тогда площадь фигуры

$$S=1\cdot h_1+1\cdot h_2+\ldots+1\cdot h_n=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}=1.$$

Комментарии. 1. Можно провести рассуждение по индукции. Пусть Маша красит прямоугольник сразу, как только Миша отметил точку. Когда Миша отметит точку (1; 1), Маша закрасит прямоугольник площади 1. Далее, когда Миша отмечает точку с абсциссой n, Маша закрашивает прямоугольник площади $1/n$ первый раз и площади $1/n$ — второй раз (остальное придётся на точки, уже закрашенные более одного раза). Таким образом, площадь фигуры, состоящей из всех точек, закрашенных ровно один раз, не изменяется.

2. Наглядно этот факт можно увидеть, «сдвинув» все прямоугольники к оси ординат.



3. *Ответ.* $3k$, $k \in \mathbb{N}$.

Решение. В самом деле, из чисел, кратных 3, число 1 получить не удастся, так как если число N кратно 3, то и $N+3$ кратно 3, а если $N=5k$ кратно 3, то и k кратно 3, так как 3 и 5 взаимно простые. А значит, все получающиеся в результате этих операций числа будут кратны 3, но 1 не делится на 3.

Пусть N не кратно 3. Заметим, что числа N, $N+3$, $N+6$, $N+9$ и $N+12$ также не кратны 3 и имеют разные остатки при делении на 5, значит, одно из них кратно 5. Следовательно, после первой операции деления на 5 Вера получит число, не кратное 3 и не превышающее $\frac{N+12}{5}=0{,}2N+2{,}4$, что строго меньше N при $N>3$. Иными словами, после каждого деления на 5 Верины числа уменьшаются, пока не получится число 1 или 2. Но из числа 2 за два шага также получается число 1.

Комментарий. Формулировка этой задачи похожа на известную открытую проблему — гипотезу Коллатца. С данным натуральным числом N проводится следующая операция: если N чётно, то оно делится на два, а если нечётно, то оно умножается на три и к результату прибавляется один (получается число $3N+1$), после чего процесс повторяется. Гипотеза состоит в том, что рано или поздно в результате таких операций получится единица. На данный момент с использованием распределенных вычислений гипотеза проверена до чисел порядка 10^{21}, в наиболее сложных случаях для получения единицы требуется порядка 3000 шагов.

4. *Ответ.* Да, верно.

Решение. Заметим, что в каждом матче разыгрывается 2 очка, за один круг проводится $20 \cdot 19/2 = 190$ матчей. Тогда за один круг будет разыграно 380 очков, а после окончания турнира каждая команда наберёт по 38 очков. Далее предположим, что требуемой пары команд не найдётся.

Назовём команду с наибольшим числом очков после первого круга *лидером*. На первом круге лидер набрал не менее 29 очков, так как в противном случае всеми командами набрано не более $28 + 27 + \ldots + 9 = 370$ очков, что меньше, чем общее число очков, разыгранное во всех матчах первого круга.

Следовательно, на первом круге лидер выиграл не менее 10 матчей. Тогда на втором круге он в матчах с этими командами также выиграет или сыграет вничью (в противном случае найдётся требуемая пара команд), а следовательно, в матчах второго круга он наберёт не менее 10 очков. Общая сумма очков лидера за два круга составит не менее 39 очков. Противоречие.

Комментарии. 1. В последней части решения фактически доказано, что в первом круге лидер набрал не более 28 очков. Рассуждая аналогично, можно доказать, что команда с наименьшим числом очков после первого круга набрала в нём не менее 10 очков. Тогда по принципу Дирихле найдутся две команды с одинаковым числом очков. Противоречие.

2. В случае нечетного числа команд утверждение задачи неверно. Опишем пример для $2n+1$ команд. Занумеруем их от 1 до $2n+1$. Пусть в первом круге во встречах команд, разность номеров которых больше n, побеждает команда с меньшим номером, а остальные игры заканчиваются вничью. Во втором круге наоборот, если разность номеров больше n, игра заканчивается вничью, а в остальных встречах побеждает команда с большим номером. Тогда команда с номером i в первом круге набирает $3n+1-i$ очков, а во втором $n-1+i$.

5. *Первое решение* (основано на работе участника олимпиады А. Маланьина). По замечательному свойству трапеции точка пересечения продолжений боковых сторон P, точка пересечения диагоналей O и середина основания AD точка M лежат на одной прямой (см. рис. 1). Пусть K, L — середины диагоналей AC и BD. Тогда $KL \parallel AD$, то есть $AKLD$ — тоже трапеция, и по её замечательному свойству точка O, точка пересечения её диагоналей H и точка M лежат на одной прямой. Следовательно, точки P, H и M лежат на одной прямой.

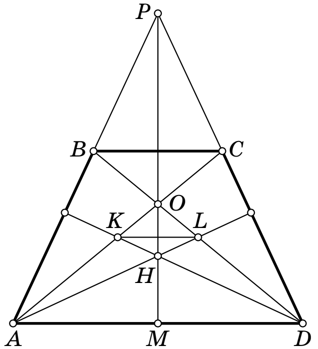


Рис. 1

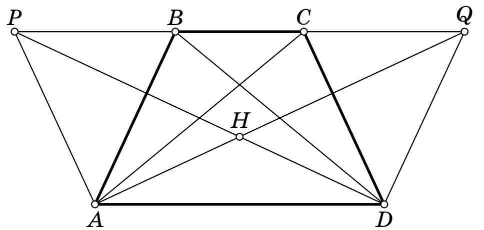


Рис. 2

Для завершения доказательства рассмотрим треугольник APD, в нём точка H — точка пересечения высот к сторонам AP и PD, следовательно, медиана PM проходит через его ортоцентр и является высотой. Таким образом, треугольник APD — равнобедренный, откуда немедленно следует, что и трапеция $ABCD$ — равнобокая.

Комментарий. Идею с ортоцентром можно реализовать и без использования замечательного свойства, рассмотрев треугольник KLM.

Второе решение. Пусть перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке H. Продлим их до пересечения с прямой BC в точках P и Q соответственно (см. рис. 2). Так как AQ пересекает BD в середине и $BQ \parallel AD$, то $ABQD$ — параллелограмм. Следовательно, $AB = DQ$ и $\angle AQD = \angle BAQ$. Аналогично $APCD$ — параллелограмм, и $CD = AP$ и $\angle APD =$ $= \angle PDC$. Отметим, что $\angle BAQ = \angle PDC$, как дополняющие вертикальные при вершине H до 90°, тогда и $\angle AQD = \angle APD$.

Значит, трапеция $APQD$ — вписанная, следовательно она равнобокая. Тогда $AB = DQ = AP = CD$, что и требовалось.

6. *Ответ*. 15.

Решение. Если Полина возьмёт себе все черви, все тузы, всех королей и всех дам, то Василиса не сможет набрать очки на тузе, короле и даме червей, т. е. наберёт не больше 15 очков.

Теперь докажем, что при любом выборе Полины Василиса может заработать не меньше 15 очков. Выложим карты в клетки таблицы 4×9 (в одном столбце карты одного достоинства, в одной строке — карты одной масти). Докажем, что если Полина закрасила черным 18 клеток, то Василиса может выделить не менее 15 непересекающихся *хороших* пар: в каждой паре две клетки разного цвета, находящиеся в одной строке или одном столбце. (Тогда Василиса на ход одной картой из пары сможет отвечать ходом второй карты из этой пары и заработать 15 очков.)

Назовём *типом* столбца количество чёрных клеток в нём. Сначала Василиса рассматривает столбцы типа 2 (если они есть). Каждый из них, очевидно, разбивается на две хорошие пары.

Далее Василиса рассматривает пары столбцов типа 0 и 4. Каждая такая пара, очевидно, разбивается на четыре хорошие пары клеток.

Далее Василиса рассматривает пары столбцов типа 1 и 3. Каждая такая пара тоже разбивается на четыре хорошие пары клеток (см. рис. 1).

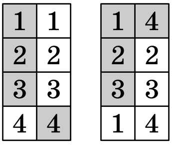


Рис. 1

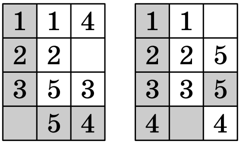


Рис. 2

Когда указанные пары столбцов закончатся, в силу симметрии можно считать, что «необработанными» останутся только столбцы типов 4 и 1. Если это a столбцов типа 4 и b столбцов типа 1, то $4a + b = 3b$, т. е. $b = 2a$. В тройке из столбца типа 4 и двух столбцов типа 1 Василиса сможет выделить не менее пяти хороших пар клеток (см. рис. 2).

Так как $3a = a + b \leqslant 9$, то на всей доске останется не более трёх нехороших пар, т. е. Василиса «потеряет» не больше 3 очков.

Комментарий. Рассмотрим следующий граф. Карты будут вершинами, а ребрами соединим пары карт одной масти или одного достоинства. Тогда игра заключается в том, что Полина делит этот граф на две равные доли (удаляя рёбра между вершинами, попавшими в одну долю), а Василиса ищет в нём наибольшее паросочетание. Помочь в этом может следующая теорема.

Теорема (Холл). Если в двудольном графе для любого натурального k любые k вершин одной из долей связаны по крайней мере с k вершинами другой, то граф разбивается на пары.

Задача Василисы — найти наибольший подграф, для которого условия теоремы Холла выполняются. Это можно сделать следующим образом. В одной из долей найдём наибольшую группу из k вершин, для которой нарушаются условия теоремы Холла, то есть эта группа связана менее чем с k вершинами из другой доли. Для этого необходимо, чтобы в другую долю попало не более $k - 1$ карточек, у которых масть или достоинство совпадает с какой-то карточкой из этой группы. Тогда при условии, что $k \leqslant 9$, всего карточек, у которых совпадает масть или достоинство, не менее $9 + 3k$, из них в первой доле должно быть не менее $9 + 3k - (k - 1) = 10 + 2k$ карточек. Из неравенства $10 + 2k \leqslant 18$ получаем, что $k \leqslant 4$. Если $k \leqslant 3$, то эту группу вершин выкинем из графа. Для оставшегося графа выполняются условия теоремы Холла. Если $k = 4$, то из такой группы (в силу того же неравенства) хотя бы одна вершина связана с вершиной из другой доли. Её и оставим, а оставшиеся три выкинем, и опять для оставшегося графа выполняются условия теоремы Холла. А если $k > 9$, то достаточно проделать всё то же самое для другой доли, можно доказать, что там соответствующая группа будет содержать не более 9 вершин.