1. *Ответ.* $\frac{x^2-10x+15}{11}$.

Решение. Пусть искомый многочлен $P(x)=ax^2+bx+c$. Тогда

$$\begin{aligned}
&P(x)+P(x+1)+\ldots+P(x+10)= \\
&\quad =a(x^2+(x+1)^2+\ldots+(x+10)^2)+ \\
&\qquad +b(x+(x+1)+\ldots+(x+10))+11c= \\
&\quad =a(11x^2+(2+4+\ldots+20)x+(1+2^2+\ldots+10^2))+ \\
&\qquad +b(11x+1+2+\ldots+10)+11c= \\
&\quad =11ax^2+110ax+385a+11bx+55b+11c= \\
&\quad =11ax^2+(110a+11b)x+(385a+55b+11c).
\end{aligned}$$

Получаем равенство квадратных трехчленов

$$11ax^2+(110a+11b)x+(385a+55b+11c) \quad \text{и} \quad x^2.$$

Это равносильно равенству коэффициентов, то есть системе уравнений

$$\begin{cases} 11a=1, \\ 110a+11b=0, \\ 385a+55b+11c=0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $a=\frac{1}{11}$, $b=-\frac{10}{11}$, $c=\frac{15}{11}$.

2. *Решение.* Обозначим количество фильмов за n. Представим, что человек купил билеты на те фильмы, которые ему понравились. Тогда всего продано $8n$ билетов, причем поскольку мужчинам и женщинам продано одинаковое количество билетов, то $4n$ билетов купили мужчины и $4n$ — женщины. Тогда фильмов, на которых хотя бы 7 из 8 билетов продано женщинам, не более чем $\frac{4n}{7}$, значит, других хотя бы $n-\frac{4n}{7}=\frac{3}{7}n$, а это и есть фильмы, понравившиеся хотя бы 2 мужчинам.

3. *Ответ.* Нет.

Решение. Допустим, такой 19-угольник существует.

Рассмотрим градусные меры 19 центральных углов, опирающихся на стороны: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{19}$. Угол между $(i+1)$-й и i-й сторонами, измеренный в градусах, равен

$$\frac{360-\alpha_i-\alpha_{i+1}}{2},$$

а значит, это число целое для любого $1 \leqslant i \leqslant 19$ (для удобства записи считаем, что $\alpha_{20} = \alpha_1$). Это означает, что $\alpha_i + \alpha_{i+1}$ — целое четное число.

Тогда $\alpha_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{19}) - (\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_4 + \alpha_5) - \ldots - (\alpha_{18} + \alpha_{19}) = 360 - (\alpha_2 + \alpha_3) - (\alpha_4 + \alpha_5) - \ldots - (\alpha_{18} + \alpha_{19})$ тоже целое четное число. Аналогично можно доказать, что каждое α_i — целое четное число.

Поскольку все стороны в 19-угольнике разные, то и центральные углы, опирающиеся на них, должны быть разными, то есть $\alpha_i \neq \alpha_j$.

Тогда $360 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{19} \geqslant 2 + 4 + \ldots + 38 = \frac{19 \cdot (2 + 38)}{2} = 380$. Противоречие.

4. *Решение*. Заметим, что OA касается описанной окружности треугольника AXY, так как

$$\angle BAO = 90^\circ - \angle C = \angle MYC = \angle XYA.$$

Пусть F — точка на окружности, описанной около ABC, такая что $AF \perp BC$. Ясно, что

$$\angle AEF = \angle AEB + \angle BEF = \angle ACB + \angle BAF = \\ = \angle ACD + \angle DAC = \angle ADM = \angle AEM.$$

Получаем, что E, M и F лежат на одной прямой. Кроме того, $\angle MEC = \angle FEC = \angle FAC = \angle MYC$, что значит, что E, Y, M и C лежат на одной окружности. Далее,

$$\angle AEY = \angle AEC - \angle YEC = 180^\circ - \angle ABC - \angle YMC = \\ = 90^\circ - \angle ABC = \angle AXY,$$

т. е. E лежит на описанной окружности треугольника AXY. Тогда OE — касательная, так как $OE = OA$ и OA — касательная к окружности AXY.

5. *Решение*. Поскольку $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$, то сумма квадратов всех чисел на доске увеличивается в два раза с каждым ходом. Из формулы

$$(n-3)^2 + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + \\ + (n+3)^2 + (n+4)^2 = 8n^2 + 8n + 44$$

ясно, что сумма квадратов 8 последовательных целых чисел даёт остаток 4 при делении на 8. Значит, сумма квадратов 1000 последовательных целых чисел тоже даёт остаток 4 при делении на 8.

Таким образом, после первого хода сумма квадратов чисел на доске всегда будет делиться на 8, и, следовательно, на доске никогда больше не появятся 1000 последовательных целых чисел.

Замечание. Число 1000 в условии этой задачи можно заменить на произвольное чётное число. Доказательство основано на том, что сумма квадратов 2^k последовательных целых чисел даёт остаток 2^{k-1} при делении на 2^k.

6. *Ответ.* При любых k.

Решение. Рассмотрим множество клеток A_1, которое является вертикальным отрезком длины k. Заметим, что каждый столбец пересекает A_1 по 0 или k клеткам, а каждая строка или диагональ — по 0 или 1 клетке.

Рассмотрим множество A_2, которое состоит из k копий отрезка A_1, каждая из которых получается из предыдущей переносом на вектор $(k, 0)$. Таким образом, A_2 состоит из k отрезков длины k, разделённых $k-1$ пустыми столбцами. Заметим, что любая строка или столбец пересекают A_2 по 0 или k клеткам, а каждая диагональ — по 0 или 1 клетке (так как никакая диагональ не пересекает две копии A_1 в A_2).

Множество A_3 состоит из k копий A_2, каждая из которых получается переносом предыдущей на вектор (k^2, k^2). Любая строка, столбец или диагональ, параллельная вектору $(1, -1)$, пересекает не более одной копии A_2 в A_3, а любая диагональ, параллельная вектору $(1, 1)$, либо не пересекает ни одной, либо пересекает все копии A_2 в A_3. Следовательно, строки, столбцы и диагонали, параллельные вектору $(1, 1)$, пересекают 0 или k клеток из A_3, а диагонали, параллельные вектору $(1, -1)$ пересекают 0 или 1 клетку.

Аналогично построим множество A_4: оно состоит из k копий A_3, каждая из которых получается переносом на вектор $(k^3, -k^3)$ из предыдущей. Любая строка, столбец или диагональ, параллельная вектору $(1, 1)$, пересекает не более одной копии A_3 в A_4, а любая диагональ, параллельная вектору $(1, -1)$, либо не пересекает ни одной, либо пересекает все копии. Следовательно, любая строка, столбец или диагональ пересекает A_4 по 0 или k клеткам.

Замечание. Получившийся пример можно рассматривать как проекцию узлов 4-мерного куба $k \times k \times k \times k$ на плоскость.